НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Юлдашев Турсун Камалдинович
Ташкентский государственный экономический университет,
Улица Каримова, 49, Ташкент, 100066, Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9346-5362
Суюнова Наргиза Абудурашид кызы
Джизакский государственный педагогический университет,
Джизак, Узбекистан

Аннотация. Рассмотрены вопросы разрешимости нелокальной краевой задачи для одного линейного псевдопараболического уравнения. С помощью метода ряда Фурье получена счетная система обыкновенных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения коэффициентов неизвестной функции. При доказательстве однозначной разрешимости счетной системы применен метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Показаны абсолютная и равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования полученных рядов Фурье. Результаты работы сформулированы в виде теорем.

Ключевые слова: Линейное псевдопараболическое уравнений, счетная система, интегральное условие, интегральное уравнение Фредгольма, разрешимость.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HIGH-ORDER LINEAR PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Yuldashev Tursun Kamaldinovich
Tashkent State University of Economics, Karimov
Street, 49, Tashkent, 100066, Uzbekistan

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9346-5362
Suyunova Nargiza Abudurashid qizi
Jizzakh State Pedagogical University, Jizzakh, Uzbekistan

Annotation. The questions of solvability of a nonlocal boundary value problem for a linear pseudoparabolic equation are considered. Using the Fourier series method, a countable system of Fredholm ordinary integral equations of the second kind is obtained to determine the coefficients of an unknown function. In proving the unique solvability of the countable system, the method of successive approximations was used in combination with the method of contraction mappings. The absolute and uniform convergence and the possibility of term-by-term differentiation of the obtained Fourier series are shown. The results of the work are formulated in the form of theorems.

Keywords: Linear pseudoparabolic equation, countable system, integral condition, Fredholm integral equation, solvability.

1. **Постановка задачи.** Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов являются одним из актуальных разделов современной математики. Поэтому по данному разделу математики до сих пор появляются большое количество научных публикаций (см. например [1-14]).

Исследуется классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для линейного псевдопараболического уравнения в прямоугольной области $\Omega=\{(t,x)|\,0<t<T,\,0<x<l\}$:

$$D_{t,x}^{1+4k}[U(t,x)]=\alpha(t)U(t,x), \tag{1}$$

где псевдопараболический оператор высокого порядка имеет вид

$$D_{t,x}^{1+4k}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]-(-1)^k\varepsilon\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

T и l - положительные действительные числа, k заданное положительное целое число, $\alpha(t)-$непрерывная функция на отрезке Ω_T, $0<\varepsilon-$ малый параметр, $\Omega_T \equiv [0;T]$, $x \in \Omega_l \equiv [0;l]$.

Постановка задачи. Найдем функцию $U(t,x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующему нелокальному условию

$$U(0,x)+\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{2}$$

условиям типа Дирихле для $0\le t\le T$

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l)=$$

$$=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l)=0 \tag{3}$$

и классу функций

$$U(t,x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^{1,4k}_{t,x}(\Omega)\cap C^{1+2k}_{t,x}(\Omega), \tag{4}$$

где $\varphi(x)-$ заданная гладкая функция и имеют место условия

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(l)=$$

$$=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi(0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi(l)=0.$$

2. **Разложение решения задачи (1)-(4) в ряд Фурье.** Нетривиальные решения краевой задачи (1)-(4) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,\vartheta_n(x), \tag{5}$$

где

$$u_n(t)=\int_0^l U(t,x)\,\vartheta_n(x)\,dx, \tag{6}$$

$$\vartheta_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad n=1,2,...$$

Подставляя ряд Фурье (5) в псевдопараболическое уравнение (1), получаем счетную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменной t

$$u_n'(t)+\lambda_n(\varepsilon)u_n(t)=\frac{\alpha(t)u_n(t)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}, \tag{7}$$

где $\lambda_n(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon\,\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}$, $\quad \mu_n^{4k}=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^{4k}$.

Интегрируем счетную систему дифференциальных уравнений первого порядка (7) и получаем необходимое представление

$$u_n(t)=A_n e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds, \tag{8}$$

где A_n- произвольное постоянное.

С помощью коэффициентов Фурье (6) интегральное условие (2) записывается в следующем виде

$$u_n(0)+\int_0^T u_n(t)\,dt=\int_0^l\left(U(0,x)+\int_0^T U(t,x)\,dt\right)\vartheta_n(x)\,dx=$$

$$=\int_0^l \varphi(x)\vartheta_n(x)\,dx=\varphi_n. \tag{9}$$

Для нахождения неизвестного коэффициента A_n в (8), воспользуемся условием (9). Тогда из (8) получим

$$A_n+A_n\int_0^T e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}dt+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds\,dt=$$

$$=A_n\frac{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}{\lambda_n(\varepsilon)}+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds\,dt=\varphi_n.$$

Отсюда находим неизвестный коэффициент интегрирования:

$$A_n=\frac{\lambda_n(\varepsilon)}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\left[\varphi_n-\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds\,dt\right]. \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (8), получаем счетную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$u_n(t) = \Im(t; u_n(t)) \equiv$$

$$\equiv \frac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\left[\varphi_n - \frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds\,dt\right]+$$

$$+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds. \tag{11}$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (11) неизвестной функции в ряд Фурье (5), получаем формальное решение краевой задачи (1)-(4)

$$U(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left\{\frac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\times\right.$$

$$\times\left[\varphi_n - \frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds\,dt\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^t e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\alpha(s)u_n(s)\,ds\right\}. \tag{12}$$

3. **Однозначная разрешимость счетной системы интегральных уравнений Фредгольма (11). Условия гладкости.** Пусть для функций

$$\varphi(x) \in C^{4k}\left(\Omega_l\right)$$

в области существуют кусочно-непрерывные производные по переменной x порядка $4k+1$. Тогда, интегрируя по частям функций в (9) $4k+1$ раз по переменной x, получаем следующее соотношение

$$|\varphi_n| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\frac{|\varphi_n^{(4k+1)}|}{n^{4k+1}}, \tag{13}$$

где

$$\varphi_n^{(4k+1)} = \int_0^l \frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\vartheta_n(x)\,dx,\ i=1,2.$$

Для последней функции имеет место неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n^{(4k+1)}\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 d\,x. \tag{14}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости (13) и условия:

$$\rho=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k}}}\left[\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|\,ds\,dt+\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t|\alpha(s)|\,ds\right]<1.$$

Тогда счетная система (11) однозначно разрешима в банаховом пространстве $B_2(T)$. При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} u_n^0(t)=\varphi_n\dfrac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}, \\ u_n^{m+1}(t)=\Im(t;u_n^m(t)),\ m=0,1,2,... \end{cases} \tag{15}$$

Доказательство. Мы используем метод последовательных приближений, сочетая его с методом сжимающих отображений в пространстве $B_2(T)$. Сначала оценим следующую величину по абсолютной величине

$$\left|\frac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\right|.$$

Действительно, имеем

$$\left|\frac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\right|=\left|\frac{\lambda_n(\varepsilon)}{e^{\lambda_n(\varepsilon)t}+\lambda_n(\varepsilon)e^{\lambda_n(\varepsilon)t}-e^{-\lambda_n(\varepsilon)(T-t)}}\right|\le\left|\frac{\lambda_n(\varepsilon)}{\lambda_n(\varepsilon)e^{\lambda_n(\varepsilon)t}}\right|=\left|\frac{1}{e^{\lambda_n(\varepsilon)t}}\right|\le 1.$$

С учетом формул (13) применяем неравенство Коши-Буняковского к оценке нулевого приближения и затем применяем неравенство Бесселя (14). Тогда получаем из приближения (15), что справедлива следующая оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n^0(t)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n\frac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|\le\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_{1,n}^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}\le$$

$$\le\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\left\|\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty. \tag{16}$$

Теперь для разности произвольных приближений (15) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n^{m+1}(t)-u_n^m(t)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t\left|e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\right|\cdot|\alpha(s)|\cdot\left|u_n^m(s)-u_n^{m-1}(s)\right|ds\,dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\left|e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\right|\cdot|\alpha(s)|\cdot\left|u_n^m(s)-u_n^{m-1}(s)\right|ds\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|\cdot\left|u_n^m(s)-u_n^{m-1}(s)\right|ds\,dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{4k}}\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t|\alpha(s)|\cdot\left|u_n^m(s)-u_n^{m-1}(s)\right|ds\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{8k}}}\left\|u^m(t)-u^{m-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|ds\,dt+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{8k}}}\left\|u^m(t)-u^{m-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t|\alpha(s)|ds\leq\rho\cdot\left\|u^m(t)-u^{m-1}(t)\right\|_{B_2(T)},\quad(17)$$

где

$$\rho=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k}}}\left[\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|ds\,dt+\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t|\alpha(s)|ds\right].$$

Согласно условию теоремы, $\rho<1$. Следовательно, из оценки (17) следует, что оператор $\Im$ в правой части (11) является сжимающим. Из оценок (16) и (17) следует, что существует единственная неподвижная точка в банаховом пространстве $B_2(T)$, которая является решением счетной системы (11). Теорема доказана.

4. Неизвестная функция

Теорема 2. Неизвестная функция $U(t,x)$ существует и однозначно определяется из ряда Фурье (12). При этом функция (12) непрерывно дифференцируема по переменным, входящим в уравнение (1).

Доказательство. С учетом того, что $u(t)\in B_2(T)$ получаем оценку

$$|U(t,x)|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\vartheta_n(x)|\max_{t\in\Omega_T}\left\{\left|\frac{\lambda_n(\varepsilon)e^{-\lambda_n(\varepsilon)t}}{1+\lambda_n(\varepsilon)-e^{-\lambda_n(\varepsilon)T}}\right|\times\right.$$

$$\times\left[|\varphi_n|+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t\left|e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\right|\cdot|\alpha(s)u_n(s)|ds\,dt\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\int_0^t\left|e^{-\lambda_n(\varepsilon)(t-s)}\right|\cdot|\alpha(s)u_n(s)|ds\right\}\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{4k}}\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|\cdot|u_n(s)|ds\,dt+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\frac{1}{\mu_n^{4k}}\int_0^t|\alpha(s)|\cdot|u_n(s)|ds\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}+\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|\cdot|u_n(s)|ds\,dt+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\frac{1}{n^{4k}}\int_0^t|\alpha(s)|\cdot|u_n(s)|ds\le$$

$$\le\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\left\|\varphi^{(4k+1)}\right\|_{\ell_2}+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k}}}\left\|u(t)\right\|_{B_2(T)}\int_0^T\int_0^t|\alpha(s)|ds\,dt+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k}}}\left\|u(t)\right\|_{B_2(T)}\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t|\alpha(s)|ds<\infty. \tag{18}$$

В силу того, что $u(t)\in B_2(T)$ из (18) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье (12). Непрерывная дифференцируемость функции (12) по переменным, входящим в уравнение (1), доказывается аналогично.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Asanova A. T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2015. Vol. 63. P. 1–13.

2. Asanova A. T. One approach to the solution of a nonlocal problem for systems of hyperbolic equations with integral conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2019.Vol. 238. № 3. P. 189–206.

3. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal problem for a nonlinear fractional mixed type integro-differential equation with spectral parameters // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060003. 20 p.

4. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudoheperbolic-pseudoelliptic type differential equation //AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060004. 21p.

5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. Москва: Наука, 1986. 336 с.

6. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: СО «Наука», 1983. 319 с.

7. Бердышев А. С. Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в области с отходом от характеристики // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2117–2124.

8. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

9. Дмитриев В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 2 (42). С. 15–27.

10. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. №4. С. 547–564.

11. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №2. С. 294–304.

12. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. №5. С. 1008–1011.

13. Прилепко А. И., Ткаченко Д. С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №4. С. 562–570.

14. Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Об одной нелокальной задаче для нелинейного параболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16. № 1. С. 42–49.