DISKRET MARKOV ZANJIRLARI VA UNING TATBIQLARI

Abirov Ruxshod Ashirovich

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston milliy universiteti.

II bosqich magistranti

Annotatsiya. Ushbu ishda diskret Markov zanjirlariga oid kerakli asosiy tushunchalar va faktlar keltirilgan. Diskret Markov zanjirlari tatbiqlari xam tadqiq qilingan.

Kalit so'zlar. Diskret, Markov zanjiri, holatlar fazosi,

Markov jarayonlari nazariyasida fizikadan olingan atamalar ishlatiladi: jarayonning qiymatlar to'plami *fazalar fazosi* (yoki *holatlar fazosi*), uning elemantlari esa *holatlar* deb ataladi. $\xi(t)$, $t\epsilon T$- tasodifiy jarayonni qarayotganda, vaqtning t momentida fazaviy holati $\xi(t)$ bo'lgan sistemani qaraymiz.

Markov zanjiri deb atalgan jarayonlar birinchi marta 1906-1907 yillarda A.A.Markovning rus tilida yozilgan asarlarida uchraydigan unli va undosh harflar ketma ketligining xossalarini o'rganishga bag'ishlangan ishlarida ko'rilgan.

Ushbu ishda biz Markov jarayonlarining muhim sinfi hisoblanadigan, holatlar fazosi chekli yoki sanoqli to'plamdan iborat bolgan, bir jinsli Markov zanjirlari bilan tanishamiz va uning asosiy xossalarini *o'rganamiz.* Umumiylikka zarar keltirmasdan Markov zanjirining holatlari natural sonlardan iborat, deb faraz qilishimiz mumkin. *t* parametr manfiy bo'lmagan butun qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni *T* ={0,1,2,...} deb faraz qilamiz. U holda $\xi(t)$ Markov xossasini qanoatlantiruvchi tasodifiy ketma-ketlikdan iborat bo'ladi.

Izoh 1.1. ξ_1 , ξ_2,… ushbu {1,2,...,n} to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning ixtiyoriy ketma-ketligi bo'lsin. Shartli ehtimolning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy t > 0, $t\epsilon$N lar uchun

$$\mathrm{P}(\xi_0 = i_0. \xi_1 = i_1, \dots, \xi_t = i_{t,}, \dots , \xi_{t+1} = i_{t+1})$$
$$=\mathrm{P}(\xi_0 = i_0) \prod_{s=0}^{t} P\{\xi_{s+1} = i_{s+1} | \xi_0 = i_0, \xi_s = i_s\} \tag{1.1}$$

tenglik o'rinli.

Agar ξ_1 , ξ_2,… tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda

$$\mathrm{P}\{\xi_{s+1} = i_{s+1} | \xi_0 = i_0, \xi_s = i_s\}= \mathrm{P}(\xi_{s+1} = i_{s+1})$$

Va birgalikdagi taqsimot formulasi ancha soddalashadi :

$$\mathrm{P}(\xi_0 = i_0. \xi_1 = i_1, \dots, \xi_t = i_{t,}, \dots , \xi_{t+1} = i_{t+1})=\prod_{s+1}^{t+1} \mathrm{P}(\xi_s = i_s) \tag{1.2}$$

(1.1) va (1.2) munosabatlarni qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi markov zanjiri deyiladi.

Ta'rif 1.1. Holatlar to'plami S chekli yoki sanoqli bo'lgan *diskret vaqtli Markov zanjiri* deb tasodifiy miqdorlarning shunday {ξ_t, t =0,1,2, …} ketma ketligiga aytiladiki, ular ixtiyoriy t≥0 va ixtiyoriy $i_0, i_1, \dots i_t, i_{t+1} \epsilon S$ holatlar uchun

$$\mathrm{P}\{\xi_{t+1} = i_{t+1} | \xi_0 = i_0, \dots, \xi_t = i_t\}= \mathrm{P}\{\xi_{t+1} = i_{t+1} | \xi_t = i_t\}=p_{i_t,i_{t+1}}^{(t)}$$

shartni qanoatlantiradi.

Tasodifiy miqor ξ_0, sistemaning boshlang‘ich holatini bildiradi va uning taqsimoti boshlang‘ich taqsimot deyiladi.

$$p_k^{(0)} = P(\xi_0 = \mathrm{k}),\ \ \sum_k p_k^{(0)} = 1$$

Agar $p_{ij}^{(t)}$ funksiya t ga bog’liq bo‘lmasa, u holda *Markov zanjiri vaqtga nisbatan bir jinsli* deyiladi.

Holatlar to‘plami {1,2,3,…n} bo‘lgan vaqtga nisbatan bir jinsli Markov zanjiri uchun (1.1) formula

$$\mathrm{P}=(\xi_0 = \mathrm{i}_0 . \xi_1 = \mathrm{i}_1, \dots, \xi_\mathrm{t} = \mathrm{i}_{\mathrm{t},})$$

$$\mathrm{P}(\xi_0 = \mathrm{i}_0) \prod_{k=1}^{t} P\{\xi_\mathrm{k} = \mathrm{i}_\mathrm{k} | \xi_{\mathrm{k}-1} = \mathrm{i}_{\mathrm{k}-1}\} = p_{i_0}^0 \ \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{t}} \mathrm{p}_{\mathrm{i}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{i}_\mathrm{k}} \qquad (1.3)$$

ko’rinishni oladi. Holatlar to‘plami {1,2,3,…n} bo’lgan vaqtga nisbatan bir jinsli Markov zanjiri trayektoriyalarining taqsimotlari n^2 +n ta parametrlar

$$p_k^{(0)} = \{p_k^{(0)} = P(\xi_0 = k), 1 \leq k \leq n\}$$

va $p_{ij} = P\{\ \xi_{i+1} = j\ | \xi_i = i\ \}$o‘tish ehtimollari bilan aniqlanadi. p_{ij} ni sistema bir qadamda i-holatdan j-holatga o’tish ehimoli deb talqin qilish mumkin.

O‘tish ehtimoli $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$ matritsani hosil qiladi.

O‘tish matritsasining barcha elementlari nomanfiy, har bir satrdagi elementlar yig‘indisi birga teng. Bunday matritsalar *stoxastik matritsalar* deyiladi. Har bir ustun elementlarining yig‘indisi ham birga teng bo‘lgan stoxastik matritsalar *ikki marta stoxastik matritsalar* deyiladi.

Vaqt bo‘yicha bir jinsli bo’lmagan Markov zanjirlarida $P^{(t)} = \left\| p_{ij}^{(t)} \right\|$- o‘tish matritsalari t ga bog‘liq bo’ladi.

Sanoqli Markov zanjirlarining o‘tish ehtimollari guruhini o‘lchovlari cheksiz bo‘lgan matritsa shaklida ifodalash mumkin.

Endi Markov zanjirlarini tashkil qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun bir necha misollar keltiraylik.

1.1 –misol. Butun qiymatlarni qabul qiluvchi bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan miqdorlar ketma-ketligi $\{\xi_\mathrm{t}\}_{t=0}^{\propto}$ bir jinsli Markov zanjirini hosil qiladi. Bu holda

$$p_{ij} = P(\ \xi_{i+1} = j\ | \xi_{t-1} = i\ ) = P(\xi_\mathrm{t} = \mathrm{j}) = P(\xi_0 = \mathrm{j}) = p_j^{(0)},$$

ya’ni P matritsaning har bir satri boshlang‘ich taqsimotdan iborat.

1.2-misol. $\{\eta_\mathrm{t}\}_{t=1}^{\infty}$ - bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, $\mathrm{P}(\eta_t = 1)$=p, $\mathrm{P}(\eta_t = -1)$=q va p+q=1 bo‘lib, $\{\xi_\mathrm{t}\}$ ketma-ketlik

$$\xi_\mathrm{t} = \max\{\xi_{\mathrm{t}-1} + \eta_t, 0\},\ t=0,1,2,\dots$$

Formula orqali ifodalangan bo’lsin. $\{\xi_\mathrm{t}\}$ ketma-ketlik 0 nuqtada qaytaruvchi ekranli manfiy bo‘lmagan butun sonlar to’plamida *tasodifiy daydish* deb ataladi.

ξ_t ketma-ketlik Markov zanjiri hosil qilishini ko’rish qiyin emas. Bu holda $P(\xi_{t+1} = i + 1 \mid \xi_t = i)$=p, $P\{\xi_{t+1} = i - 1 \mid \xi_t = i\}$ =q, i≥1 tengliklar o‘rinli bo‘lgani uchun bu Markov zanjiri:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

o‘tish matritsasiga ega.

1.3-misol. ξ_t-bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan nomanfiy butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, $P(\xi_t=k)= p_k$, k=0,1,2,…bo’lsin. U holda $S_0=0$, $S_n=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n$ deb qabul qilsak, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ ketma-ketlik bir jinsli sanoqli Markov zanjirini tashkil qiladi. Bu holda o‘tish ehtimollari

$$p_{ij} = P\{S_n = j \mid S_{n-1} = i\} = P\{S_{n-1} + \xi_n = j \mid S_{n-1} = i\} = P(\xi_n = j - i)$$

$$\begin{cases} p_{j-1}, j \geq i \\ 0, j < i \end{cases}$$

ko‘rinishga ega. Bu misolda o‘tish ehtimollari

$$P = \begin{pmatrix} p_0 p_1 p_2 p_3 \dots \\ 0 \;\; p_0 p_1 p_2 \dots \\ 0 \;\; 0 \;\; p_0 p_1 \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

bo‘lib uning har bir satri oldingi satrning elemantlarini bir raqam o‘ng tomonga surishdan hosil bo‘ladi.

1.4-misol. (Diffuziya uchun Erenfestlar modeli). Fiziklar Paul va Tatyana Eranfest nomi bilan ataluvchi bu model zarrachalari (bir- biri bilan tutashtirilgan) ikkita idishda ko‘chish jarayonini tavsiflaydi va u molekulalarning harakati jarayonida klassik mexanika nuqtai nazaridan qaytariluvchan deb hisoblangan, qaytarilamaydigan o‘zgarishlarning (tutashtirilgan idishlarda bosimlarning tenglashishi natijasida) vujudga kelish oqibatlarini tushuntirib berish uchun taqdim etilgan.

Ikkita idishda n ta zarracha bor bo‘lsin. Vaqtning har bir t=0,1,2,… momentida tasodifan va undan oldingilariga bog‘liqsiz, n ta zarrachalardan bittasi teng imkoniyatli ravishda tanlanadi va u 1/2 ehtimol bilan o‘z idishida qoladi, yoki bo’lmasa 1/2 ehtimol bilan boshqa idishga o‘tkaziladi. ξ_t bir jinsli Markov zanjirini tashkil qiladi va

$$P\{\xi_{t+1}=j|\xi_t=j\}=1/2,$$

$$P\{\xi_{t+1}=j-1|\xi_t=j\}=\frac{j}{2n},$$

$$P\{\xi_{t+1}=j+1|\xi_t=j\}=\frac{n-j}{2n}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lgani sababli, o‘tish matritsasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{n-1}{2n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{n-2}{2n} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{2n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Endi m qadamda sistemaning holatlari o‘zgarishini o‘rganamiz. Shu maqsadda $p_{ij}(m)=P(\xi_m=j|\xi_0=i)-m$ qadamda sistema i holatdan j holatga o‘tish ehtimollarini ko‘ramiz.

$\{\xi_t\}$- holatlar to‘plami {1,2,3,…n} va o‘tish ehtimollari matritsasi P bo’lgan Markov zanjiri bo’lsin. m qadamda o‘tish ehtimollari P(m)=$\|p_{ij}(m)\|$, m=1,2,3,... matritsasini va $\bar{p}$(t)=($p_1(t), p_2(t), \dots\ p_n(t)$) vektorlarni kiritamiz, bu yerda $p_k(t)$=P($\xi_t=k$)

1.1-teorema. O‘tish ehtimollari matritsasi P bo’lgan bir jinsli Markov zanjirlari uchun ixtiyoriy m≥1 bo’lganda

$$P(m) = P^m,\ \bar{p}(t+m)= \bar{p}(t)\, P^m, \qquad (1.4)$$

O‘tish ehtimollari matritsasi $P^{(m)}=\|P\{\,\xi_{n+1}=j\ |\xi_n=i\,\}\|$ bo‘lgan bir jinsli Markov zanjirlari uchun esa

$\|P\{\,\xi_{t+m}=j\ |\xi_t=i\,\}\|=P^{(t)}\,P^{(t+1)}\dots P^{(t+m-1)}$;

$\bar{p}(t+m)=\bar{p}(t)\,P^{(t)}\,P^{(t+1)}\dots P^{(t+m-1)}$ (1.5)

tengliklar o‘rinli.

Isbot. To‘la kvadrat tenglama formulasiga ko‘ra, istalgan k∊{1,2,3,…} va ixtiyoriy i,j∊{1,2,3,…} uchun

$$p_{ij}(m+1)=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(m)p_{kj}=(P(m)P)_{ij}$$

tenglik o‘rinli, bu yerda $(A)_{ij}$- A matritsaning i-satridagi j-elementini bildiradi. Shunday qilib, P(m+1)=P(m)P. Bundan, induksiyaga ko‘ra, (1.4) formula kelib chiqadi.(1.5) formula ham shu kabi isbotlanadi.

Ixtiyoriy n-tartibli P=$\|p_{ij}\|$ va Q=$\|q_{ij}\|$ stoxastik matritsalarning ko‘paytmasi

S=$\|s_{ij}\|$=PQ yana stoxastik matritsa bo‘ladi. Haqiqatdan ham, ko‘paytmaning elementi nomanfiy ekanligi o‘z-o‘zidan ravshan. Shu bilan birga

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{kj} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \sum_{k=1}^{n} q_{ki} = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1,$$

ya’ni S matritsa ham stoxastik matritsa ekan.

Shunday qilib 1.1-teoremadagi P^m va $P^{(t)}\, P^{(t+1)} \ldots P^{(t+m-1)}$; matritsalar ham stoxastik.

Markov zanjiri holatlarining klassifikatsiyasi. M-Markov zanjirining holatlar to‘plami, $p_{ij}(t)$ esa i-holatdan j-holatga t qadamda o‘tish ehtimoli bo‘lsin. Markov zanjiri holatlarini Markov zanjiri trayektoriyalari, ularga tushish momentlarining xarakteriga ko’ra klassifikatsiyalash mumkin.

Ta’rif 1.2. Agar biror $t > 0$ uchun $p_{ij} > 0$ bo‘lsa, u holda bir jinsli Markov zanjirining j-*holati* i-*holatidan keyin* keladi deyiladi. Va buni j→i simvol orqali belgilanadi.Agar i→j va j→I bo’lsa (i~j), i va j holatlar tutashgan holatlar deyiladi. Holatlar to‘plamida ekvivalent munosabat bo‘lishini tekshirib ko‘rish qiyin emas.

Quyida keltirilgan tushunchalar Markov zanjirilari nazariyasida ko‘p ishlatiladi. iϵM holat:

1) agar $p_{ii}(1)$=1 bo‘lsa, yutib qoluvchi holat deyiladi,

2) agar , $p_{ii}(t)$>0 shartni qanoatlantiruvchi t- vaqt momentlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi d>1 bo’lsa, d *davrli holat* deyiladi;

3) agar uning davri 1 ga teng bo‘lsa, u holda u davriy emas deyiladi;

4) agar ∃ iϵM i→j, j↛i bo’lsa u holda u *ahamiyatga molik emas* deyiladi;

5) agar ∀ jϵM; { i→j}⇒{ j↛i} bo’lsa, u holda u *ahamiyatga molik holat* deyiladi.

Ahamiyatga molik i-holat: a) agar P{∃t<∞;$\xi_t = i \,\big|\, \xi_0$=i}=1 shart bajarilsa *qaytaruvchan*; b) bunda agar t→∞ da $p_{ii}(t)$ →0 bo‘lsa, u holda “nol qaytuvchan” deyiladi; c) agar $\lim_{t\to\infty}(\sup)\, p_{ii}(t) > 0$ shart bajarilsa, i *musbat qaytuvchan holat* deyiladi.

Barcha tutashgan holatlar sinflaridan tashkil topgan to‘plamda qisman tartib munosabati o‘rnatilgan: A va B tutashgan holatlar sinflar bo‘lsin. Agar eng kamida bitta iϵA holat qandaydir jϵB holatdan keyin kelsa, u holda holatlar sinfi A, B dan so‘ng keladi deyiladi va buni B→A simvol orqali belgilanadi. Tutashgan sinflar uchun A→B, B→A vaziyat (hol) A=B bo‘lgandagina bajarilishi mumkin.

Qaytuvchan holatlar *final sinf* tashkil qiladi: ulardan so‘ng boshqa sinflar kelishi mumkin emas. Har bir yutib qoluvchi holat qaytuvchan, bu bir elementli tutashgan qaytuvchan holatlar sinfini tashkil qiladi.

Ta'rif 1.3. Bitta tutashgan holatlar sinfidan iborat bo'lgan Makov zanjiri *yoyilmaydigan*, agar u bir nechta tutashuvchi holatlar sinfidan tashkil topgan bo'lsa, u *yoyiluvchi Markov zanjiri* deyiladi.

1.5-misol. a) *Davriy zanjirlar*. O'tish mstritsasi $P=\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \end{pmatrix}$

bo'lgan bir jinsli Markov zanjirlari berilgan bo'lsa, u holda

$$P^2=\begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix},\quad P^3=\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix},\ P^4=P,\ldots$$

tengliklar o'rinli.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

[1] A. N. Shiryayev. Probability. " Graduate Texts in Mathematics ;95" . Springer Science+. Business Media, LLC. 1984 year.

[2] Sh.Q.Formanov. Ehtimolliklar nazariyasi. Darslik. Toshkent, "Universitet", 2014.

[3] Самарова С.С.2-курс теория вероятностей Лектор А.В. Булинский. Гр.855.