Xosmas matritsadan m-darajali ildizni chiqarish.

Oltinbekova Munira Ilhomjon qizi
Jizzax davlat pedagogika instituti talabasi.

Annotatsiya. Ushbu maqolada xosmas matritsadan m-darajali ildiz chiqarish masalasi ko'rib o'tilgan.

Аннотация. В данной статье обсуждается проблема извлечения корня m-го уровня из неспецифической матрицы.

Abstract. This paper discusses the problem of extracting the m-level root from a non-specific matrix.

Kalit so'zlar: matritsa, xosmas matritsa, xarakteristik son.

Ключевые слова: матрица, обратная матрица, характеристическое число.

Keywords: matrix, inverse matrix, characteristic number.

Ma'lumki xozirgi kunda matritsalar matematika, mexanika, nazariy fizika, nazariy elektrotexnika va boshqa ko'plab soxalarda keng qo'llanilmoqda.

Bizga

$$X^m = A \qquad (1)$$

tenglamaga tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda A −berilgan n-tartibli matritsa, X −esa n tartibli izlanayotgan matritsa, m −berilgan butun musbat son.

Quyidagi

$$|A| \neq 0$$

holni ko`rib o`taylik. Bu holda A matritsaning xarakteristik sonlari 0 dan farqli yoki $|A|$ barcha xarakteristik sonlar ko`paytmasiga teng.$A$ matritsaning elementar bo`luvchilarini

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\dots(\lambda-\lambda_u)^{p_u} \qquad (2)$$

deb belgilaylik va A matritsani quyidagicha

$$A=U\tilde{A}U^{-1}=U\{\lambda_1E_1+H_1,\dots,\lambda_uE_u+H_u\}U^{-1} \qquad (3)$$

Jordan formasiga olib kelsak, izlanayotgan X matritsamizning xarakteristik sonlarini m-darajaga ko`tarish natijasida A matritsaning xarakteristik sonlari kelib chiqadi.Bunda X matritsaning xarakteristik sonlari ham 0 dan farqli. Shuning uchun bu xaraketristik sonlarning hosilasi

$$f(\lambda)=\lambda^m$$

0 ga teng bo`lmaydi.Lekin bu holda $X$ matritsani m-darajaga ko`targanda X matritsaning elementar bo`luvchilari bo`linib ketmaydi.Yuqorida keltirib o`tilganlardan $X$ matritsaning elementar bo`luvchilari

$$(\lambda-\xi_1)^{p_1}(\lambda-\xi_2)^{p_2}\dots(\lambda-\xi_u)^{p_u} \qquad (4)$$

bo`ladi. Bu yerda agar $\lambda_j$ had$\lambda_j\big(\xi_j=\sqrt[m]{\lambda_j};(j=1,2,\dots,u)\big)$ni$m-$ darajasining ildizlaridan biri bo`lsa, $\lambda_j^m=\lambda_j$ bo`ladi.Endi esa $\sqrt[m]{\lambda_jE_j+H_j}$ ni quyidagicha aniqlaymiz.$\lambda$tekislikda 0 ni qabul qilmaydigan markazi $\lambda_j$ nuqatada bo`lgan aylana olaylik.Bu aylanada $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning m ta alohida tarmoqlarga egamiz.Bu tarmoqlarni aylananing markazi bo`lgan λ_j nuqtadagi qiymatiga qarab bir-biridan ajratish mumkin.Izlanayotgan X matritsamiz ξ_j xarakteristik soni bilan λ_j nuqtadagi qiymati mos tushuvchi tarmoqni $\sqrt[m]{\lambda}$ orqali belgilaylik va $\sqrt[m]{\lambda_jE_j+H_j}$ yoyiluvchi qator yordamida matritsadan funksiyani aniqlaylik.

$$\sqrt[m]{\lambda_jE_j+H_j}=\lambda_j^{\frac{1}{m}}E_j+\frac{1}{m}\lambda_j^{\frac{1}{m}-1}H_j+\frac{1}{2}!\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\lambda_j^{\frac{1}{m}-2}H_j^2+\cdots \qquad (5)$$

$\lambda_j$nuqtada qaralayotgan $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning hosilasi 0 dan farqli, bundan esa (5) matritsa faqat bitta elementar bo`luvchiga ega

$$(\lambda - \xi_j)^{p_j}, \quad E_j = \sqrt[m]{\lambda_j}(j = 1,2,\dots,u).$$

Bu yerda $E_j = E^{(p_j)}, \quad H_j = H^{(p_j)}(j = 1,2,\dots,u)$.Bu yerdan ko`rinib turibdiki

$$(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u})$$

kvazidioganal matritsa, X izlanayotgan matritsa kabi xuddi shunday (4) elementar bo`luvchilarga ega bo`ladi.Shuning uchun quyidagicha T xosmas matritsa

$$(T \neq 0) \quad X = T\left(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\right)T^{-1} \qquad (6)$$

mavjud bo`ladi. Tmatritsani aniqlash uchun , ayniyatning ikkala tomoniga

$$(\sqrt[m]{\lambda})^m = \lambda$$

ni qo`yamiz. $\lambda$matritsaning o`rniga $\lambda_j E_j + H_j(j = 1,2,\dots,u)$ qo`yib,

$$\left(\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}\right)^m = \lambda_j E_j + H_j(j = 1,2,\dots,u)$$

ga ega bo`lamiz.Endi esa (2.4.1) va (2.4.6) dan

$$A = T\{\lambda_1 E_1 + H_1, \lambda_2 E_2 + H_2, \dots, \lambda_u E_u + H_u\}T^{-1} \qquad (7)$$

kelib chiqadi.(3) va (7) larni taqqoslab:

$$T = \cup X_{\tilde{A}} \qquad (8)$$

ga ega bo`lamiz.Bu yerda $X_{\tilde{A}} - \tilde{A}$ bilan o`rin almashtirilgan ixtiyoriy xosmas matritsa.$X_{\tilde{A}}$ −matritsaning tuzilishi 2.1 mavzuda to`liq tushuntirib o`tilgandi.

(6) dagi T matritsaning o`rniga $\cup X_{\tilde{A}}$ ifodani qo`yib, (1) tenglamaning barcha yechimlarini qamrab oluvchi

$$X = \cup X_{\tilde{A}}\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\}X_{\tilde{A}}^{-1}U^{-1} \qquad (9)$$

formulani olamiz.Bu formulaning o`ng tomonidagi ko`pqiymat diskret hamda kontinual xarakterga ega:bu ko`pqiymatning diskret xarakteri kvazidiagonal matritsaning turli xil chekli tarmoqlarida $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning turli panjaralarini tanlash hisobiga olinadi.Bunday holda $\lambda_j = \lambda_k$ bo`lganda ham $\sqrt[m]{\lambda}$ tarmoqning j va k diagonal panjaralari turli xil bo`lishi mumkin.Bu ko`pqiymatning kontinual xarakteriga $X_{\tilde{A}}$ matritsada saqlanuvchi ixtiyoriy parametrlari hisobiga ega bo`lamiz.(1) tenglamaning barcha yechimlarini $A$ matritsadan olingan m-daraja ildizlar deb ataymiz va $\sqrt[m]{A}$ kabi belgilaymiz.Umumiy holda $\sqrt[m]{A}A$ matritsadan olingan funksiya hisoblanmaydi va bu $A$ matritsadan olingan ko`phad ko`rinishida berilmaydi.

Agar A matritsaning barcha elementar bo`luvchilari o`zaro tub bo`lsa, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ sonlar hammasi turli xil, unda $X_{\tilde{A}}$ matritsa kvazidiagonal ko`rinishga

$$X_{\tilde{A}} = \{X_1, X_2, \dots, X_u\} \qquad (10)$$

ega bo`ladi. Bu yerda $X_j$ matritsa $\lambda_j E_j + H_j$ bilan o`rin almashinuvchidir, shu sababli $\lambda_j E_j + H_j, \ \ (j = 1,2, \dots, u)$ istalgan funksiya bilan ham o`rin alamashinuvchidir.Shuning uchun (10) formula qaralayotgan holda

$$X = U\left(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\right)U^{-1}$$

ko`rinishni oladi.Bunday holda, agar $A$ matritsaning elementar bo`luvchilari o`zaro tub bo`lsa, $X = \sqrt[m]{A}$ uchun formulada faqat diskret ko`pqiymat mavjuddir.Bu holda $\sqrt[m]{A}$ ning ixtiyoriy qiymatini $A$ dan olingan ko`phad deb tasavvur qilish mumkin.

1 −misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$X^2 = A$$

tenglamaning barcha yechimlari, A ning barcha kvadrat ildizlarini topish talab qilinsin.Bu holda A matritsa Jordan formasiga ega bo`lgan bo`ladi.Shuning uchun (10) formulaga $A = \tilde{A}, U = E$ ni qo`yish mumkin.Bu holda $X_{\tilde{A}}$ matritsa

$$X_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$$

kabi ko`rinishda bo`ladi.Bu yerda a, b, c, d, e −ixtiyoriy parametrlar.

Xning barcha izlangan yechimlarini beruvchi (10) formula bu holda quyidagi ko`rinishni

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}^{-1} \quad \varepsilon^2 = \eta^2 = 1 \qquad (11)$$

qabul qiladi.(10) formuladagi X ni o`zgartirmay turib, $X_{\tilde{A}}$ ni $|X_{\tilde{A}}| = 1$ qiymatni beruvchi birorta skalyarga ko`paytirish mumkin.Bu holda bu $a^2 e = 1$ tenglikga olib keladi, bu yerdan esa $e = a^{-2}$ ligi kelib chiqadi.$X_{\tilde{A}}^{-1}$matritsaning elementlarini hisoblaylik.Bu uchun $X_{\tilde{A}}$ matritsa matritsa koeffitsientlari bilan chiziqli almashtirishni yozib olaylik:

$$y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3,$$

$$y_2 = ax_2,$$

$$y_3 = dx_2 + a^{-2}x_3.$$

Bu tenglamalar sistemasini x_1, x_2, x_3 ga bog`liq holda yechaylik.Unda $X_{\tilde{A}}^{-1}$ teskari matritsa bilan almashtirishga ega bo`lamiz:

$$x_1 = a^{-1}y_1 - (a^{-2}b - cd)y_2 - acy_3$$

$$x_2 = a^{-1}y_2$$

$$x_3 = -ady_2 + a^2y_3.$$

Bu yerdan esa

$$X_{\tilde{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & cd - a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^{2} \end{pmatrix}$$

ni topamiz.(11) formula

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon & (\varepsilon - \eta)acd + \frac{\varepsilon}{2} & a^2c(\eta - \varepsilon) \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon - \eta)da^{-1} & \eta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon & (\varepsilon - \eta)\upsilon\omega + \frac{\varepsilon}{2} & (\eta - \varepsilon)\upsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon - \eta)\upsilon & \eta \end{pmatrix} (\upsilon = a^2c; \omega = a^{-1}d) \quad (12)$$

ni beradi. Xning yechimini ikkita ixtiyoriy υ va ω parametrlarga va ikkita ε va η ixtiyoriy belgilarga bog`liq.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati

1. Белман Р. В. Ведение теории матриц. – М. , Наука, 1976.

2. Гельфонт И. М. Чизиыли алгебрадан лекциялар. -Т. Олий ва щрта мактаб. 1964

3. Гантмахер Р. Теории матриц. − М.: Наука, 1967. − 576 с.

4. Груйич Л.Т., Мартинюк А.А., Риббенс – Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. − Киев.: Наука. думка, 1984. − 307 с.