LAGRANJ FUNKSIYASI YORDAMIDA ISTE'MOLCHI UCHUN TANLOV MASALASINING YECHIMI VA XOSSALARI

O.N.Tagayev, ass. O'zMU Jizzax filiali
B.I.Ashurov, ass. SamISI

Annotatsiya: Iste'mol tanlovi masalasi yoki Iste'molchining bozordagi ratsional xatti-harakati masalasi iste'molchining foydalilik funksiyasiga berilgan byudjet cheklovida maksimal qiymat beruvchi $(x_1^0,\ x_2^0)$ iste'mol to'plamini tanlashdan iborat.

Har bir tovarga sarf-harajat iste'molchi umumiy daromadining yarmini tashkil etadi va har bir tovarning zaruriy miqdorini topish uchun shu tovarga sarflanadigan mablag'ni uning narxiga bo'lish lozimligini o'rganish to'g'risida yuritilgan.

Kalit so'zlar: Iste'molchi tanlovi. Byudjet cheklovi, talab funksiyasi, iste'molchi, Lagranj funksiyasi.

Аннотация: Расходы на каждый товар составляют половину общего дохода потребителя, и исследование того, следует ли разделить сумму, потраченную на этот товар, на его цену, чтобы найти необходимое количество каждого товара.

Ключевые слова: Потребительский выбор. Ограничение бюджета, функция спроса, потребитель, функция Лагранжа.

Annotation: The cost of each good is half of a consumer's total income, and research into whether the amount spent on that good should be divided by its price to find the amount of each good needed.

Keywords: Consumer choice. Budget limit, demand function, consumer, Lagrange function.

Iste'mol tanlovi masalasi yoki Iste'molchining bozordagi ratsional xatti-harakati masalasi iste'molchining foydalilik funksiyasiga berilgan byudjet cheklovida maksimal qiymat beruvchi $(x_1^0,\ x_2^0)$ iste'mol to'plamini tanlashdan iborat.

Byudjet cheklovi mahsulotlarga pul xarajatlari pul daromadidan oshmasligini, ya'ni $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$ ekanligini anglatadi, bu yerda p_1 va p_2 lar mos ravishda birinchi va ikkinchi mahsulotlar bir birligining bozor narxlari, I

esa iste'molchining birinchi va ikkinchi mahsulotlarni sotib olish uchun sarflashga tayyor bo'lgan daromadi. $p_1, \ p_2$ va I kattaliklar berilgan bo'ladi.

Formal ravishda iste'mol tanlovi masalasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq I,$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0$$

shartlarda

$$u(x_1, x_2) \text{ (max).}$$

Iste'mol tanlovi masalasining yechimi bo'luvchi $(x_1^0, \ x_2^0)$ to'plamni iste'molchi uchun *optimal yechim* yoki iste'molchining *lokal bozor muvozanati* deb atash qabul qilingan.

Ushbu qo'yilishda iste'mol tanlovi masalasi chiziqli bo'lmagan programmalash masalasi bo'ladi. Biroq, agar biror-bir $(x_1, \ x_2)$ iste'mol to'plamida $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$ byudjet cheklovi qat'iy tengsizlik ko'rinishda bajarilsa, u holda biz mahsulotlardan birining iste'molini va shu tariqa foydalilik funksiyasini ko'paytirishimiz mumkin. Demak, foydalilik funksiyasiga maksimal qiymat beruvchi $(x_1^0, \ x_2^0)$ to'plam byudjet cheklovini tenglikka aylantirishi, ya'ni $p_1x_1^0 + p_2x_2^0 = I$ bo'lishi kerak.

Biz, shuningdek, $(x_1^0, \ x_2^0)$ optimal nuqtada $x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0$ shartlar $u(x_1, x_2)$ funksiyaning xossalaridan kelib chiqib avtomatik ravishda bajariladi deb hisoblaymiz. Odatda, bu haqiqatan ham shunday. Ayni bir paytda, agar o'zgaruvchilarning nomanfiyligi shartlari masala shartiga oshkor holda qo'shilmasa, u holda ushbu masala matematik jihatdan ancha sodda holga keladi.

Demak, iste'mol tanlovi masalasini

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

shartda

$$u(x_1, x_2) \text{ (max)}$$

ko'rinishdagi shartli ekstremumni topish masalasi bilan almashtirish mumkin (chunki bu ikki masalaning $(x_1^0, \ x_2^0)$ yechimi bir xil).

Bu shartli ekstremumni topish masalasini yechish uchun Lagranj usulidan foydalanamiz.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

Lagranj funksiyasini yozib, uning x_1, x_2, λ o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz va ularni nolga tenglaymiz:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1' - \lambda \cdot p_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2' - \lambda \cdot p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.$$

Hosil qilingan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan λ noma'lumni yo'qotib, ikki x_1, x_2 noma'lumli

$$\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{p_1}{p_2}, \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I,$$

ikkita tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va undan iste'mol tanlovi masalasining $(x_1^0,\ x_2^0)$ yechimini topamiz.

Iste'mol tanlovi masalasi $(x_1^0,\ x_2^0)$ yechimining x_1^0 va x_2^0 koordinatalari p_1, p_2 va I parametrlarning funksiyalaridir:

$$x_1^0 = x_1^0(p_1, p_2, I), \quad x_2^0 = x_2^0(p_1, p_2, I).$$

Hosil qilingan funksiyalar birinchi va ikkinchi mahsulotga *talab funksiyalari* deb ataladi. Talab funksiyalarining muhim xossasi narxlar va daromadga nisbatan ularning nolinchi darajadagi bir jinsliligidir, ya'ni talab funksiyalarining qiymatlari narxlar va daromadning proporsional o'zgarishiga nisbatan invariantdir: ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun

$$x_1^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1^0(p_1, p_2, I),\ x_2^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2^0(p_1, p_2, I)$$

o'rinlidir. Bu barcha narxlar va daromad ayni bir xil martaga o'zgarsa ham, (birinchi yoki ikkinchi — farqi yo'q) mahsulotga talab kattaligi o'zgarmasligini anglatadi.

Ikkita tovarli bitta sodda iste'mol tanlovi masalasini yechaylik. Bu tovarlarning noma'lum miqdorlari x_1 va x_2 ga, ularning bozor narxlari esa mos ravishda p_1 va p_2 ga teng bo'lsin. Qaralayotgan masala

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \text{ (max)} \tag{1}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le I, \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0 \tag{3}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Biz aniqlaganimizdek, optimal nuqtada byudjet cheklovi tenglik ko'rinishida bajarilishi kerak, binobarin, ikkala tovar o'ta zarur bo'lgani uchun (agar ulardan biri yo'q bo'lsa, foydalilik nolga teng bo'ladi) o'zgaruvchilarning nomanfiyligi shartlari avtomatik ravishda bajariladi. Demak, yechilayotgan matematik programmalash masalasi shartli ekstremumni topishning klassik masalasiga aylanadi. Ekstremumning zaruriy shartlarini yozib (ularga asosan tovarlar limit foydaliliklarining nisbatlari ularning bozor narxlari nisbatlariga teng bo'lishi kerak, byudjet cheklovi esa tenglik ko'rinishida bajariladi),

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}, \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bundagi birinchi shart qaralayotgan masalada ikkala tovarga sarflanadigan pul miqdorlari bir xil, ya'ni $x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1$ bo'lishi kerakligini anglatadi. Bu foydalilik funksiyasida x_1 va x_2 o'zgaruvchilarning «vaznlari» yoki daraja ko'rsatkichlari tengligidan kelib chiqadi. Demak, $x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1 = \frac{I}{2}$ va talab funksiyalari

$$x_1 = \frac{I}{2 \cdot p_1}; \qquad x_2 = \frac{I}{2 \cdot p_2}$$

ko'rinishni oladi.

Shunday qilib, har bir tovarga sarf-xarajat iste'molchi umumiy daromadining yarmini tashkil etadi va har bir tovarning zaruriy miqdorini topish uchun shu tovarga sarflanadigan mablag'ni uning narxiga bo'lish lozim.

Adabiyotlar

1.Шодиев Т.Ш. ва бошқалар. Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар. Ўқув қўлланма. –Т.: ТДИУ, 2010. – 297 б.

2.Фомин Г.П.Математические методи и модели в коммерческой деятелности. Учебник. –М.: ИНФРА-М, 2009. – 395 с.

3.Шапкин А.С. Математические методи и модели исследования операций. Учебное пособие. –М.: Дашков и К., 2009. – 361 с.