MATEMATIKA VA INFORMATIKA

matinfo.jspi.uz

MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

№ 4
2021

M U N D A R I J A

BERNULI VA PUSSON TAQSIMOTLARI

Bayzaqov Maxmud Baxodir o'g'li

JDPI umumiy matematika

kafedrasi o'qituvchisi

Rahimova Shaxnoza

JDPI Aniq va tabiiy fanlarni

o'qitish metodikasi (matematika) mutaxassisligi

2-bosqich magistranti

Kalit so'zlar: *tajriba, o`lchovli fazo, to'plam, tasodifiy miqdor, funksiya, extimollik.*

Keywords: *experiment, dimensional space, set, random quantity, function, probability.*

Ключевые слова: *эксперимент, размерное пространство, множество, случайная величина, функция, вероятность.*

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushinchalaridan biri "tajriba" va tajriba natijasida kuzatilishi mumkin bo`lgan hodisa tushinchalaridir.

Tajriba natijasida ro`y berishi oldindan aniq bo`lmagan hodisa *tasodifiy hodisa* deyiladi. Tajribaning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi. Tajriba natijasida ro`y berishi mumkin bo`lgan barcha elementar hodisalar to`plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi. Elementar hodisalar fazosini Ω orqali, har bir elementar hodisa esa $\omega(\omega \in \Omega)$ orqali belgilaymiz.([1]-[6])

Har qanday tasodifiy hosisa esa elementar hodisalar to`plamidan tashkil topgan bo`lib, uning "katta kichikligi" unga kirgan elementar hodisalarning "soni" ga bog`liqdir. Tasodifiy hodisani,odatda, lotin alfabitining bosh harflari $A, B, C, \ldots$ lar bilan belgilanadi. "Eng katta" hodisa $\Omega$ bo`lib, u barcha elementar hodisalar to`plamidan iboratdir. Agar tajriba natijasida $A(A \subset \Omega)$ ga kirgan $\omega$ elementar hodisalarning birortasi ro`y bersa, A *hodisa ro`y berdi* deyiladi. Agar shu elementar hodisalardan birortasi ham ro`y bermasa, A hodisa ro`y bermaydi, unda $A$ hodisaga *teskari hodisa* (uni $\overline{A}$ orqali belgilaymiz) *ro`y bergan* deymiz. A va $\overline{A}$ *o`zaro qarama-qarshi hodisalar* deyiladi.

$\Omega -$ biror to`plam, $\mathrm{F} -$ uning qism to`plamlarining biror sistemasi bo`lsin. Agar

1. $\Omega \in \mathrm{F}$
2. $A_i \in \mathrm{F}; i = 1, 2, ..., n$ dan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{F}$ kelib chiqsa,
3. $A \in \mathrm{F}$ dan $\overline{A} \in \mathrm{F}$ kelib chiqsa, F sistema *algebra tashkil etadi* deyiladi.

Agar ikkinchi shart o`rniga $A_i \in \mathrm{F}, i = 1, 2, ..., n...$ dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{F}$ kelib chiqsin degan shartning bajarilishi talab qilinsa, u holda F sistema $\sigma -$ *algebra tashkil etadi* deyiladi. Odatda $\Omega -$ elementar hodisalar fazosi, $\Omega = \{\omega\} -$ fazoning elementlari, nuqtalari elementar hodisalar, F ning elementlari esa tasodifiy hodisalar deyiladi. F ning o`zi esa hodisalarning $\sigma -$ *algebrasi* deyiladi. ([1]-[6])

Ta'rif 1. Agar Ω to`plam va to`plamning qism to`plamlaridan iborat $\mathrm{F}$ $\sigma -$ algebra berilgan bo`lsa, u holda *o`lchovli fazo berilgan* deyiladi va uni $< \Omega, \mathrm{F} >$ kabi belgilanadi.

**Ta`rif 2**. $\mathrm{F}$-$\Omega$ ning to`plam ostilaridan tuzilgan algebra bo`lsin. To`plamlar funksiyasi $P(A)$, $A \in \mathrm{F}$, chekli additiv ehtimollik o`lchovi deyiladi, agar o`zaro kesishmaydigan A va B to`plamlar ($A \cap B = \varnothing$) uchun

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

tenglik o`rinli bo`lib, $P(\Omega) = 1$ bo`lsa.

$< \Omega, \mathrm{F}, P >$ uchlik ehtimollik fazosi deyiladi. Shunday qilib, ehtimmollik fazosi $< \Omega, \mathrm{F} >$ o`lchovli fazo va $\mathrm{F}$ da berilgan manfiy bo`lmagan, normalashtirilgan, sanoqli additive P o`lchovdan iborat bo`lar ekan., P o`lchov ehtimollik o`lchovi deyiladi.

(Ω, F, P)- biror ehtimollik fazosi berilgan bo`lsin.

**Ta`rif 3.** $\xi$ tasodifiy miqdor deb $\Omega$ to`plamni haqiqiy sonlar to`plami $R$ ga akslantiruvchi o`lchovli $\xi=\xi(\omega)$ funksiyaga aytiladi, ya`ni ixtiyoriy borel to`plami $B\in \mathrm{B}(R)$ ning aksi (proobrazi) $\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}$ σ-algebra F ga tegishli to`plamdir.

Bunday xollarda ξ funksiya $\langle\Omega,\mathsf{F}\rangle$ ni $\langle R,\mathrm{B}(R)\rangle$ ga o`lchovli akslantiradi deyiladi.

Masalan tanga tashlashda Ω ikki nuqtadan iborat: gerb va raqam. Agar tanganing gerb tomoniga 1 va raqam tomoniga 0 qiymatni mos qo`ysak, quyidagi jadval ko`rinishda berilgan tasodifiy miqdorni olamiz:

ω	G	R
ξ	1	0

Yuqorida ta`kidlanganidek, tasodifiy miqdor ta`rifidan to`g'ri chiziq $R$ da aniqlangan borel to`plamlarining σ-algebrasi $\mathrm{B}(R)$ dan olingan ixtiyoriy B to`plam uchun

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathsf{F}$$

munosabat o`rinli. Demak, $\langle R,\mathrm{B}(R)\rangle$ o`lchovli fazoda $P_\xi(B)=P(\xi\in B)$ ehtimollik aniqlangan ekan.

Ta`rif 4. $P_\xi(B)$ ehtimollik ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb ataladi.

Demak, ξ tasodifiy miqdor abstrakt ehtimollik fazosi (Ω,F,P) ni R dagi $(R,\mathrm{B}(R),P_\xi)$ ehtimollik fazosiga akslantiradi deb tushunish mumkin.

Agar $B=(-\infty,x)$ deb olsak, haqiqiy sonlar o`qida aniqlangan $F_\xi(x)=P(\xi<x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Tasodifiy miqdor ξ ning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x)=P\left(\xi^{-1}(-\infty,x)\right)=P(\xi<x)$$

quyidagi xossalarga ega bo`ladi.

$F1$. Har qanday $x \in R$ uchun $0 \le F_\xi(x) \le 1$

$F2$. Har qanday $x_1 \le x_2$ lar uchun $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.

$F3$. $F_\xi(x)$ chapdan uzluksiz, ya`ni

$$\lim_{x \uparrow x_0} F_\xi(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0).$$

$$F4. \qquad \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0,$$

$$\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) = 1.$$

Ixtiyoriy (Ω, F, P) ehtimollar fazosida $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor aniqlangan bo`lsin. Bu tasodifiy miqdorni diskret tipdagi tasodifiy miqdor deyiladi, agar uning qiymatlari diskret to`plamni tashkil qilsa (eslatib o`tamizki, chekli yoki sanoqli elementlarga ega bo`lgan to`plamlar diskret to`plamlar deb ataladi).[7]

$\xi -$diskret tasodifiy miqdor bo`lsin. ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ qiymatlarni mos $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ ehtimollar bilan qabul qilsin.

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Jadval diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni jadvali deyiladi. Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni $p_i = P\{\xi = x_i\}, i = 1, 2, ..., n, ...$ ko`rinishda yozish ham qulay.

$\{\xi = x_1\}, \{\xi = x_2\}, ...$ hodisalar birgalikda bo`lmaganligi uchun ular to`la gruppani tashkil etadi va ularning ehtimolliklari yig`indisi birga teng bo`ladi,ya’ni $\sum_i p_i = \sum_i P\{\xi = x_i\} = 1.$

$\xi -$diskret tasodifiy miqdor *binomial qonun* bo`yicha taqsimlangan deyiladi, agar u $0, 1, 2, ..., n$ qiymatlarni

$$p_m = P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

ehtimollik bilan qabul qilsa.

Bu yerda $0 < p < 1, q = 1 - p, m = 0, 1, ..., n.$

Binomial qonun bo`yicha taqsimlangan $\xi$ diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni quyidagi ko`rinishga ega:

ξ=m	0	1	...	m	...	n
$p_m = P\{\xi = m$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Nyuton binomiga asosan $\sum_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$. Bunday taqsimotni $Bi(n,p)$ orqali belgilaymiz.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo`ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 0 \\ \sum\limits_{m<x} C_n^m p^m q^{n-m}, & agar \quad 0 < x \le n \\ 1, & agar \quad n < x. \end{cases}$$

$\xi -$diskret tasodifiy miqdor *Puasson qonuni* bo`yicha taqsimlangan deyiladi, agar u $0,1,2,...,m,...$ qiymatlarni

$$p_m = P\{\xi = m\} = \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!},$$

ehtimollik bilan qabul qilsa. Bu yerda a biror musbat son.

Puasson qonuni bo`yicha taqsimlangan $\xi$ diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni quyidagi ko`rinishga ega:

ξ=m	0	1	...	m	...
$p_m = P\{\xi = m\}$	e^{-a}	$\frac{a \cdot e^{-a}}{1!}$	...	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	...

Teylor yoyilmasiga asosan, $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1$. Bu taqsimotni $\Pi(a)$ orqali belgilaymiz. Uning taqsimoti quyidagicha bo`ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad m \le 0 \\ \sum\limits_{m<x} \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, & agar \quad 0 < m \le x \end{cases}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

8. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., УРСС.1999.

9. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., УРСС. 2003.

10. Зубков А.М. Севостьянов Б.А. Чистяков В. П. Сборник задач по вероятностей М., “Наука”. 1989.

11. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей М., “Наука”. 2003

12. Ширяев А.Н. Вероятность-1,2. МЦНМО. 2004.

13. Sirojiddinov S.X. Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. 1980.

14. Formanov Sh.Q. Ehtimollar nazariyasi. Toshkent. 2014.