BAZI TASODIFIY MIQDORLARNING TAQSIMOT VA XARAKTERISTIK FUNKSIYALARI

Abduxakimov S. X.

JDPI, Umumiy matematika kafedrasi

Xolboyev J. S

JDPI magestri

***Mamatov Jasur Asatullayevich*.**

JDPI, Matematika o'qitish metodikasi

Annotatsiya: Ehtimolliklar nazariyasining asosiy tushinchalaridan biri tasodifiy miqdor tushinchasidir. Diskrit va uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimotlarini berishning universal usuli ularning taqsimot funksiyalarini berishdir.Taqsimot funksiya bilan bir qatorda u haqida hamma ma'lumotni o`z ichiga oluvchi xarakteristik funksiyalardan ham foydalaniladi. Xarakteristik funksiya yordamida bog`liqsiz tasodifiy miqdorlarning yig`indisining taqsimotini topish sonli xarakteristikalarni hisoblash bir muncha osonlashadi.

**Kalit so`zlar.** Tasodifiy miqdor, taqsimot funksiya, xarakteristik funksiya, o`lchovli vazo, Barel to`plami.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$- biror ehtimollik fazosi berilgan bo`lsin.

**Ta`rif 3.** $\xi$ tasodifiy miqdor deb $\Omega$ to`plamni haqiqiy sonlar to`plami $R$ ga akslantiruvchi o`lchovli $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga aytiladi, ya`ni ixtiyoriy borel to`plami $B \in \mathrm{B}(R)$ ning aksi (proobrazi) $\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ σ-algebra F ga tegishli to`plamdir.

Bunday xollarda ξ funksiya $\langle \Omega, F \rangle$ ni $\langle R, \mathrm{B}(R) \rangle$ ga o`lchovli akslantiradi deyiladi.

Masalan tanga tashlashda Ω ikki nuqtadan iborat: gerb va raqam. Agar tanganing gerb tomoniga 1 va raqam tomoniga 0 qiymatni mos qo`ysak, quyidagi jadval ko`rinishda berilgan tasodifiy miqdorni olamiz:

ω	G	R

ξ	1	0

Yuqorida ta`kidlanganidek, tasodifiy miqdor ta`rifidan to`g’ri chiziq $R$ da aniqlangan borel to`plamlarining σ-algebrasi $\mathrm{B}(R)$ dan olingan ixtiyoriy B to`plam uchun

$$\xi^{-1}(B)=\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathsf{F}$$

munosabat o`rinli. Demak, $\langle R,\mathrm{B}(R)\rangle$ o`lchovli fazoda $P_\xi(B)=P(\xi\in B)$ ehtimollik aniqlangan ekan.

Ta`rif 4. $P_\xi(B)$ ehtimollik ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb ataladi.

Agar $B=(-\infty,x)$ deb olsak, haqiqiy sonlar o`qida aniqlangan $F_\xi(x)=P(\xi<x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Misol 1. Haqiqiy sonlar o`qidan olingan $[a,b]$kesmaga tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda. Bunda nuqtaning $[a,b]$ kesmaning biror qismiga (kesmaga tegishli biror to`plamga) tushish ehtimoli shu to`plamning Lebeg o`lchoviga proporsional deb qabul qilingan. Bunda Ω $[a,b]$ kesmadan iborat va F $\sigma-$algebra $[a,b]$dan olingan borel to`plamlar sinfidan iboratdir. Tasodifiy miqdorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\xi(\omega)=\omega,\quad \omega\in[a,b],$$

ya`ni tasodifiy miqdor $[a,b]$ kesmaga tashlangan nuqta tushgan songa teng. Bunday aniqlangan tasodifiy miqdor o`lchovli funksiyadir. Agar $x<a$ bo`lsa, $F(x)=P(\xi<x)=0.$Agar $x\in[a,b],$ bo`lsa u holda $\{\xi<x\}$hodisa nuqtaning $[a,x)$ intervalga tushganini anglatadi. Ushbu intervalga tushish ehtimoli interval uzunligiga proporsional, demak

$$F(x)=P(\xi<x)=\frac{x-a}{b-a}$$

Agar $x>b$ bo`lsa, $F(x)=1$ bo`lishi tushunarli. Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Bu funksiyani $[a,b]$intervalda aniqlangan tekis taqsimot funksiyasi deyiladi.

Normal taqsimot. Ehtimoliklar nazariyasida normal taqsimot juda muhim rol o`ynaydi. Parametrlari $a$ va $\sigma^2$ bo`lgan normal taqsimot deb

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a\in R, \sigma^2>0,$$

zichlik funksiya bilan aniqlanadigan taqsimot funksiyasiga aytiladi. Haqiqatan ham $p(x)$ funksiya zichlik funksiyasi bo`ladi. Buning uchun

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}dx=1$$

tenglik ekinligini isbotlash yetarli bo`ladi. Oxirgi integralda $u=\dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirishni bajarsak, analiz kursidan ma`lum Puasson integraliga kelamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{2\pi}\,.$$

Normal taqsimot ko`p hollarda Gauss taqsimoti deb ham ataladi.

Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdor bo`lib, uning taqsimot funksiyasi

$$P(\xi<x)=F(x)$$

bo`lsin. $\xi$ tasodifiy miqdor uzluksiz taqsimot funksiyasiga ega deyiladi, agar integrallanuvchi $p(u)$ funksiya mavjud bo`lib

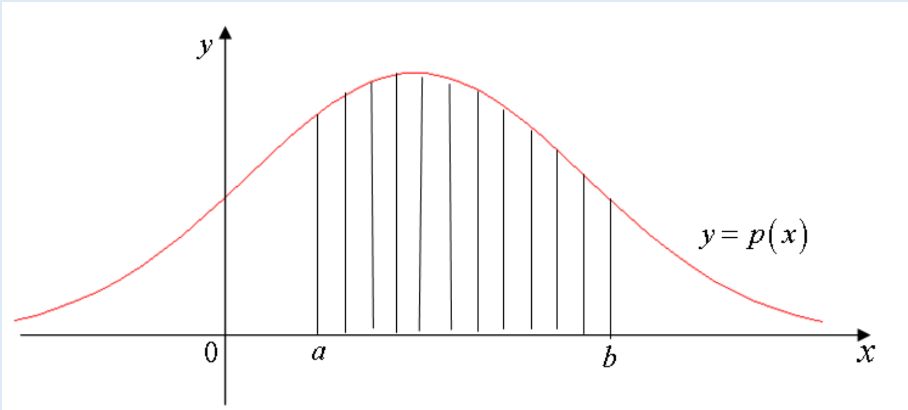
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)du, \qquad x\in R \tag{1}$$

tenglik o`rinli bo`lsa. Funksiya $p(u)$ tasodifiy miqdor ξ taqsimotining zichlik funksiyasi deyiladi.

Matematik analiz kursidan ma`lumki, (1) tenglikdagi $p(\cdot)$ funksiya uzluksiz bo`lsa, $F(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo`lib

$$F'(x)=p(x)$$

tenglik bajariladi. Bunday funksiyaning sxematik grafigi quyidagi rasmda keltirilgan.



(1-rasm)

Taqsimot funksiyasi $F(x)$ kamaymaydigan bo`lgani uchun $F'(x)\geq 0$. Demak $p(x)-$manfiy bo`lmagan funksiya va (1) tenglikdan ko`rinadiki, $F'(x)=p(x)$ tenglik deyarli hamma $x$ lar uchun o`rinli bo`ladi. ([1]-[7])

Xarakteristik funksiyalar ehtimolliklar nazariyasining analitik metodlaridan eng asosiylaridan biri bo`lib, klassik va kompleks analizning hozirgi zamon tasodifiy miqdorlarni qo`shish nazariyasida qo`llanish imkoniyatini yaratib beradi. Xarakteristik funksiyalar matematik statistikada ham muhim rol o`ynaydi. Xarakteristik funksiyalarga asoslangan analitik metodning unumli qo`llanishning negizida xarakteristik funksiyalar, taqsimot funksiyalari ka`bi ehtimollik taqsimotlarini bir qiymatli aniqlashi yotadi. ([1]-[7])

Ta`rif 5. Haqiqiy qiymatli tasodifiy miqdor ξ ning xarakteristik funksiyasi deb

$$f_\xi(t)=Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_\xi(x), \qquad t\in R$$

kompleks qiymatli funksiyaga aytiladi.

Agar taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ uzluksiz tipda bo`lib, $P_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo`lsa

$$f_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)\,dx$$

bo`lib, $f_\xi(t)$ zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ ning Fur’e almashtirishidan iborat bo`ladi. Umumiy holda esa $f_\xi(t)$ taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ ning Fur’e-Stiltes almashtirishi bo`ladi. Xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ har qanday tasodifiy miqdor $\xi$ uchun mavjud bo`ladi. Bu esa

$$|f_\xi(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot dF_\xi(x)=1$$

ekanligidan kelib chiqadi.

Endi xarakteristik funksiyalarning asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1.Har qanday tasodifiy miqdor ξ uchun

$f_\xi(0)=1$ va $|f_\xi(t)|\le 1,\ \ t\in R.$

2.Har qanday tasodifiy miqdor ξ uchun

$$f_{a\xi+b}(t)=e^{-ibt} f_\xi(at)$$

3.Agar $\xi_1,\dots,\xi_n$ – bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar bo`lsa, $S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$ yig’indining xarakteristik funksiyasi

$$f_{S_n}(t)=f_{\xi_1}(t)\dots f_{\xi_n}(t).$$

Bu tenglik matematik kutilmaning bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar ko`paytmasi uchun o`rinli bo`lgan xossasidan kelib chiqadi.

4.Xarakteristik funksiya $f_\xi(t)$ to`g’ri chiziqning har qanday chekli qismida tekis uzluksiz.

5.Agar $E|\xi|^k<\infty,\ k\ge 1$ bo`lsa, $f_\xi(t)$ $k$ – nchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lib,

$$f_\xi^{(k)}(0)=i^k E\xi^k, \qquad k\ge 1$$

tenglik o`rinli bo`ladi.

6.Agar $\overline{f(t)}$ kompleks son $f(t)$ ga qo`shma bo`lsa,

$\overline{f_\xi(t)}=\overline{Ee^{it\xi}}=E\overline{e^{it\xi}}=Ee^{-it\xi}.$

Oxirgidan xulosa qilish mumkinki, agar ξ tasodifiy miqdor simmetrik bo`lsa (ya`ni $-\xi$ bilan bir xil taqsimlangan bo`lsa) uning xarakteristik funksiyasi haqiqiy qiymatli bo`ladi.

Bernuli taqsimoti. Tasodifiy miqdor

$$\xi = \begin{cases} 1, ehtimolligi \quad p \\ 0, ehtimolligi\, 1-p \end{cases}$$

bo`lsin . Bu holda ,

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = e^{it}p + e^{it0}(1-p) = pe^{it} + 1 - p$$

Binomial taqsimot. Tasodifiy miqdor ξ qiymatlari $m = 0,1,...,n$ bo`lib,

$$P(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,...,n.$$

Bu tasodifiy miqdor $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ va bu yerda ξ_i lar Bernuli taqsimotiga ega va o`zaro bo`g`liqsiz bo`lgan tasodifiy miqdorlar. Demak, xarakteristik funksiyaning xossasiga asosan

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = Ee^{it(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)} = Ee^{it\xi_1}...Ee^{it\xi_n} = (pe^{it} + 1 - p)^n$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., УРСС.1999.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., УРСС. 2003.
3. Зубков А.М. Севостьянов Б.А. Чистяков В. П. Сборник задач по вероятностей М., “Наука”. 1989.
4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей М., “Наука”. 2003
5. Ширяев А.Н. Вероятность-1,2. МЦНМО. 2004.
6. Sirojiddinov S.X. Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. 1980.
7. Formanov Sh.Q. Ehtimollar nazariyasi. Toshkent. 2014.