УДК: 517.977.8

Х.Н. Алимов, М.Ш. Маматов

ДИСКРЕТНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Мақолада иккинчи тартибли тенгламалар системаси билан ифодаланувчи дискрет қувиш уйинларининг бир синфини урганишга багишланган. Бошлангич шартли дискрет уйинларда кувишни тугаллаш имкониятининг етарли шартлари олинган. Кувиш масаласини ечишда Чебышев купхадлари кулланилади.

Калит сузлар: қувиш, қувувчи, қочувчи, терминал туплам, қувиш бошкаруви, қочиш бошқаруви.

Аннотация. Работа посвящена изучению одного класса дискретных игр преследования, которое описывается системами уравнений второго порядка. Получены достаточные условия для возможности завершения преследования в дискретных играх с начальными условиями. При решении задачи преследования применяются полиномы Чебышева второго рода.

Ключевые слова: преследования, преследующий, убегающий, терминальное множество, управления преследования, управления убегания.

Annotation. The article is about the study of a class of discrete games of purtuit which is described by systems of seconds order eguations.

Obtained sufficient conditions for the possibility of the pursuit in discrete games with the initial conditions. In solving the tasks of pursuit apply Chebishev's second kind polinomials.

Key words: pursuit, pursuing, escaping, terminal set, pursuit control, escape control.

Модельным примером изучаемого класса дискретных игр является дискретный аналог следующего процесса преследования описываемых уравнениями колебания струны (см. [1]- [3]):

$$\begin{gathered} z_{tt} - a^2 z_{xx} = -u + \upsilon, \\ (x,t) \in D = \{0 < x < l,\ 0 < t < \mathrm{T}\}, \\ z(x,0) = \varphi_0(x),\ z_t(x,0) = \varphi_1(x),\ 0 \le x \le l, \\ z(0,t) = z(l,t) = 0,\ 0 \le t \le \mathrm{T}, \\ u = u(x,t),\ |u(x,t)| \le \rho,\ \upsilon = \upsilon(x,t),\ |\upsilon(x,y)| \le \sigma, \sigma < \rho . \end{gathered} \tag{*}$$

Игра считается законченной, если $z_0(x,t) \in \overline{\mathrm{M}}_1 + \varepsilon S$, $\overline{\mathrm{M}}_1 \subset R^1$, $\varepsilon > 0$, $S = [-1,1]$, для некоторых $t = t' \le \mathrm{T}$ для всех $0 < l_0 \le x \le l_1 < l$. $\varphi_0(x) \in \mathrm{H}^1[0,l]$, $\varphi_1(x) \in L_2[0,l]$, $u(x,t)$, $\upsilon(x,y) \in L_2(D)$.

Под решением краевой задачи (*), соответствующим $u = u(x,t)$, $\upsilon = \upsilon(x,t)$, будем понимать функцию $z = z(x,t) = z(z,t,u,\upsilon) \in \mathrm{H}^1(D)$, след которой $t = 0$ совпадает с $\varphi_0(x)$ и которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_D \left[a^2 z_x \psi_x - z_t \psi_t - (u-\upsilon)\psi \right] dxdt + \int\limits_0^l \psi(x,0)\,\phi_1(x)dx = 0$$

для всех функций $\psi = \psi(x,t) \in \mathrm{H}^1(D)$, след которых для некоторых $t = \mathrm{T}$ равен нулю. Можно показать, что краевая задача (*) при каждом $u, \upsilon \in \mathrm{H}$ имеет, и притом единственное, решение.

Для аппроксимации исходной задачи покроем область D сеточной областью $D_{h,\tau}$:

$$D_{h,\tau} = \{x_n = nh,\ 0 \le n \le r,\ t_m = m\tau,\ 0 \le m \le \theta\},$$

где $m = l/h$, $p = T/\tau$. Заменим производные во внутренних узлах $D_{h,\tau}$ конечно-разностными отношениями

$$z_{tt}(x_n,t_m) = \frac{1}{\tau^2}\left[z(x_n,t_{m+1}) - 2z(x_n,t_m) + z(x_n,t_{m-1}) \right] + o(\tau^2),$$

$$z_{xx}(x_n,t_m) = \frac{1}{h^2}\left[z(x_{n+1},t_m) - 2z(x_n,t_m) + z(x_{n-1},t_m) \right] + o(h^2).$$

Подставив эти выражения в (*), отбросив погрешность аппроксимации, получим

$$\frac{1}{\tau^2}(z_{\mathrm{n},m+1} - 2z_{\mathrm{n},m} + z_{\mathrm{n},\,m-1}) -$$

$$-\frac{a^2}{h^2}(z_{n+1,m} - 2z_{\mathrm{n},m} + z_{n-1,m}) = -u_{\mathrm{n},m} + \upsilon_{\mathrm{n},m}, \qquad (**)$$

систему разностных уравнений для внутренних узлов, $1 \le n \le r-1$, $1 \le m \le \theta - 1$. Начальные условия (*) заменим разностными соотношениями:

$$z_{0,m} = \phi_0(x_n), \quad 0 \le n \le r,$$

$$z_{1,\mathrm{m}} = \phi_0(x_n) + \tau\phi_1(x_n) + \frac{\tau^2}{2}\left(-u_{0,\mathrm{m}} + \upsilon_{0,\mathrm{m}} + \frac{\phi_0(x_{n+1}) - 2\phi_0(x_n) + \phi_0(x_{n-1})}{h^2} \right)$$

Краевые условия заменим условиями в узлах

$$z_{\mathrm{n},0} = 0, \quad z_{\mathrm{m,r}} = 0, \quad 0 \le m \le \theta.$$

Система линейных алгебраических уравнений (**) с соответствующими начальными и краевыми условиями относительно $z_{m,n}$ является разностной схемой задачи (*). Для погрешности аппроксимации дифференциального уравнения и начального условия имеет место оценка

$$\| \delta(u_n - \upsilon_n) \| \le B(h^2 + \tau^2).$$

Из (**), для значений $z_{\mathrm{n},m+1}$ на $(m+1)$-ом временном слое, имеем формулу:

$$z_{\mathrm{n,m+1}} = 2z_{\mathrm{n,m}} - z_{\mathrm{n,m-1}} +$$

$$\frac{a^2\tau^2}{h^2}(z_{n+1,\mathrm{m}} - 2z_{\mathrm{n,m}} + z_{n-1,\mathrm{m}}) + \tau^2(-u_{\mathrm{n,m}} + \upsilon_{\mathrm{n,m}}),$$

которая позволяет вычислить значение решения на втором слое

$$z_{2,0}; z_{2,1}; \ldots; z_{2,m},$$

значениям на нулевом и первом слоях. Затем можно вычислить значение решения на третьем слое $z_{3,0}; z_{3,0}; \ldots; z_{3,m}$ по значениям на первом и втором слоях и т.д.

Теперь для удобства представления запишем задачу (**) в матричном виде

$$z_{m+1} - Cz_m + z_{m-1} = -\tau^2 u_m + \tau^2 \upsilon_m, \quad z_0 = \overline{\varphi}_0, \quad z_1 = \overline{\varphi}_1, \qquad (***)$$

где z_m, u_m, υ_m – $(r-1)$ мерные матрицы–столбцы

$$z_m = (z_{\mathrm{m},1}, z_{\mathrm{m},2}, \ldots, z_{\mathrm{m,r-1}})^T$$

$$u_m = (u_{\mathrm{m},1}, u_{\mathrm{m},2}, \ldots, u_{\mathrm{m,r-1}})^T,$$

$$\upsilon_m = (\upsilon_{\mathrm{m},1}, \upsilon_{\mathrm{m},2}, \ldots, \upsilon_{\mathrm{m,r-1}})^T$$

соответственно

$$\overline{\varphi}_0 = (\varphi_0(x_1), \varphi_0(x_2), \ldots, \varphi_0(x_{r-1}))^T,$$

$$\overline{\phi}_1 = \Bigg(\phi_0(x_1) + \tau\phi_1(x_1) + \frac{\tau^2}{2}\left(-u_{1,0} + \upsilon_{1,0} + \frac{\phi_0(x_2) - 2\phi_0(x_1) + \phi_0(x_0)}{h^2}\right),$$

$$\phi_0(x_2) + \tau\phi_1(x_2) + \frac{\tau^2}{2}\left(-u_{2,0} + \upsilon_{2,0} + \frac{\phi_0(x_3) - 2\phi_0(x_2) + \phi_0(x_1)}{h^2}\right), \ \ldots,$$

$$\phi_0(x_{r-1}) + \tau\phi_1(x_{r-1}) + \frac{\tau^2}{2}\left(-u_{r-1,0} + \upsilon_{r-1,0} + \frac{\phi_0(x_r) - 2\phi_0(x_{r-1}) + \phi_0(x_{r-2})}{h^2}\right)\Bigg) -$$

начальные векторы, C – $(r-1)$-мерная квадратная трехдиагональная якобиева матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} e & \bar{e} & \cdots & \cdots \\ \bar{e} & e & \bar{e} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \bar{e} & e \end{pmatrix},$$

где $e = 2\left(1 - \left(\dfrac{a\tau}{h}\right)^2\right)$; $\bar{e} = \left(\dfrac{a\tau}{h}\right)^2$.

Вместо игры (***) будем рассматривать более общую дискретную игру, в которой движение точки z $r-1$ мерного эвклидова пространства R^m описывается уравнениями

$$z_{m-1} - Cz_m + z_{m+1} = -u_m + \upsilon_m, \quad 1 \le m \le \theta - 1, \qquad (1)$$

$$z_0 = \phi_0, \quad z_1 = \phi_1 \qquad (2)$$

где m- номер шага, $C-(r-1)x(r-1)$ - постоянная квадратная матрица, u,υ- управляющие параметры, u- параметр преследования, υ- параметр убегания, $u_j \in P \subset R^{r-1}, \upsilon_j \in Q \subset R^{r-1}$, P и Q - непустые множества, параметр u выбирается в виде последовательности $u = u(.) = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, ...), \mathrm{u}_j \in P, j = 1, 2, ..., \theta - 1,$ параметр υ - в виде последовательности $\upsilon = \upsilon(.) = (\upsilon_1, \upsilon_2, ...), \upsilon_j \in Q, j = 1, 2, ..., \theta - 1.$ Кроме того, в R^{r-1} выделено терминальное множество M.

Цель преследующего игрока вывести z_j на множество M, убегающий игрок стремится этому помещать.

Пусть в R^{r-1} выделено терминальное множество M.

Определение. Будем говорить, что в игре (1),(2) из точки $z_0=\overline{\varphi}_0$, $z_1=\overline{\varphi}_1$ можно завершить преследования за $N(z_0,z_1)\le\theta$ шагов, если по любой последовательности $\bar{\upsilon}_1,\bar{\upsilon}_2,\ldots$, значений управления убегания можно построить такую последовательность $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots$, управления преследования, что решение $(z_0,z_1,\bar{z}_2,\ldots)$ уравнения $z_{m+1}-Cz_m+z_{m-1}=-\bar{u}_m+\bar{\upsilon}_m$, $z_0=\overline{\varphi}_0$, $z_1=\overline{\varphi}_1$, $m=1,2,\ldots$ при некотором $d\le N$ удовлетворяют условию: $\bar{z}_d\in M$.

Цель настоящей работы – изучение игровых задач с дискретными уравнениями второго порядка. Для этого класса дискретных игр получены достаточные условия для возможности завершения преследования, когда положение объекта задана в граничных моментах(см. [4-14]). Для решения этой задачи применяются полиномы Чебышева второго рода [2], [3].

Пусть дискретная игра описывается уравнениями (1). Через $U_m(y)$ обозначим полином Чебышева второго рода степени n [2]:

$$U_m(y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(m+1)\arccos y}{\sin\arccos y}, & |y|\le 1,\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{y^2-1}}\left[\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^{m+1}-\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^{-(m+1)}\right], & |y|>1\end{cases}$$

Отсюда можно получить следующее: $U_{-2}(y)=-1$, $U_{-1}(y)=0$, $U_0(y)=1$, $U_1(y)=2y$, и т.д. В [2], [3] имеются следующие рекуррентные соотношения для $U_m(y)$

$$U_{m+2}(y)=2yU_{m+1}(y)-U_m(y),\ m\ge 0,\ U_0(y)=1,\ U_1(y)=2y. \tag{3}$$

Далее через $U_m(Y)$ обозначим матричный полином Чебышева от матрицы Y, определяемой по рекуррентным формулам (3). Отсюда видно, что $U_{-2}(Y)=-E$, $U_{-1}(Y)=\overline{0}$, $U_0(Y)=E$, $U_1(Y)=2Y$, где E – единичная, а $\overline{0}$ – нулевая матрица.

Лемма. Пусть $\bar{u}=\bar{u}_k=\bar{u}(k)$, $\bar{\upsilon}=\bar{\upsilon}_k=\bar{\upsilon}(k)$, $1\le k\le N$ – заданные управления. Тогда решение уравнения (1) с начальными условиями $z_0=z(0)=\overline{\varphi}_0$, $z_1=z(1)=\overline{\varphi}_1$ определяется формулой [2]

$$z_m=z(m)=U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)\overline{\varphi}_0-U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\overline{\varphi}_1+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(k)+\bar{\upsilon}(k)\right). \tag{4}$$

Доказательство. Подставляя (4) в уравнение (1) и учитывая равенство (3), получим

$$U_{m-3}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+\sum_{k=1}^{m-2}U_{m-k-2}\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(k)+\bar{\upsilon}(k)\right)-$$
$$-C\left[U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+\sum_{k=1}^{m-1}U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(k)+\bar{\upsilon}(k)\right)\right]+$$

$$+U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_m\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+\sum_{k=1}^{m}U_{m-k}\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(k)+\bar{\upsilon}(k)\right)=$$

$$=\left[U_{m-3}\left(\frac{1}{2}C\right)-CU_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)+U_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\right]z_0-$$

$$-\left[U_{m-2}\left(\frac{1}{2}C\right)-CU_{m-1}\left(\frac{1}{2}C\right)+U_{m}\left(\frac{1}{2}C\right)\right]z_1+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-2}\left[U_{m-k-2}\left(\frac{1}{2}C\right)-CU_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)+U_{m-k}\left(\frac{1}{2}C\right)\right]\tau^2\left(-\bar{u}(k)+\bar{\upsilon}(k)\right)-$$

$$-CU_0\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(m-1)+\bar{\upsilon}(m-1)\right)+U_1\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(m-1)+\bar{\upsilon}(m-1)\right)+$$

$$+U_0\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-\bar{u}(m)+\bar{\upsilon}(m)\right)=\tau^2\left(-\bar{u}(m)+\bar{\upsilon}(m)\right).$$

Лемма доказана.

Предположение 1. $M=M_0+M_1$, где M_0 – $((r-1)-\gamma)$-мерное линейное подпространство R^{r-1}; M_1 – подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0 в R^{r-1}. Через Π обозначим операцию ортогонального проектирования из R^{r-1} на L, а через $A+B$ и $A\overset{*}{-}B$ алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A,B соответственно [12]. Пусть

$$P=\underbrace{\bar{P}\times\bar{P}\times\ldots\times\bar{P}}_{r-1},\quad Q=\underbrace{\bar{Q}\times\bar{Q}\times\ldots\times\bar{Q}}_{r-1},\quad M_1=\underbrace{\bar{M}_1\times\bar{M}_1\times\ldots\times\bar{M}_1}_{\gamma},$$

$$1\le\gamma\le r-1,$$

$$W_1(m)=\sum_{k=1}^{n}\bigcap_{\upsilon(k)\in Q}\Pi U_{m-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)(-P+\upsilon(k))-M_1. \qquad (5)$$

Предположение 2. Пусть существует такое $m=m_0\le\theta$, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)\bar{\phi}_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\bar{\phi}_1\right]\in W_1(m_0). \qquad (6)$$

Теорема. Если выполнены предположения 1, 2, то в игре (1),(2) из начального положения $(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1)$ возможно завершение преследования за $N(\bar{\varphi}_0,\bar{\varphi}_1)\le m_0$ шагов.

Доказательство. Из (5) и (6) следует существования таких

$$a(k)\in\bigcap_{\upsilon(k)\in Q(k)}\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)(-P+\upsilon(k))$$

и $l\in M_1$, что

$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]=\sum_{k=1}^{m_0-1}a(k)-l. \qquad (7)$$

Пусть $\upsilon=\upsilon^0(k)$, $1\le k\le m_0-1$ – произвольное допустимое управление убегающего игрока; управление преследующего игрока $u=u^0(k)$ построим как решение следующего уравнения

$$\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\tau^2\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right)=a(k). \tag{8}$$

Ясно, что эти уравнения имеют решения по выбору $a(k)$, так как $\upsilon^0(k)\in Q$ и $u^0(k)\in P$. Подставляя $\upsilon=\upsilon^0(k)$ и $u=u^0(k)$ в (1) и применяя формулу (4), получим

$$z_{m_0}=z(m_0)=U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1+$$
$$+\sum_{k=1}^{m_0-1}U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right).$$

Отсюда, применяя к обеим частям равенства оператор проектирования Π и из равенств (7), (8), имеем

$$\Pi z(m_0)=\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m_0-1}\Pi U_{m_0-k-1}\left(\frac{1}{2}C\right)\left(-u^0(k)+\upsilon^0(k)\right)=\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m_0-1}a(k)=\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]-$$
$$-\Pi\left[U_{m_0-2}\left(\frac{1}{2}C\right)z_0-U_{m_0-1}\left(\frac{1}{2}C\right)z_1\right]+l=l\in M_1.$$

Из этого включения получим, что $\Pi z(m_0)\in M_1$ и, значит, $z(m_0)\in M$. Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] А.М. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики,*– 736 с. – М.: Наука, 1977.

[2] А.А. Самарский, Е.С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений,*– 570 с. – М.: Наука, 1978.

[3] С.Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева,* – 487 с.– М.: Наука, 1983.

[4] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры* , -500 с.-М.:Мир.-1967.

[5] Г.Ц. Дзюбенко, Б.Н. Пшеничный, *Дискретные дифференциальные игры с запаздыванием информации,* Кибернетика. -65 с. -№6.-1972.

[6] М.Ш. Маматов, *К теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами,* – 5с.– № 1.Автоматика и вычислительная техника. – Рига. 2009.

[7] М.Ш. Маматов, *О применении метода конечных разностей к решению задача преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика,* – 123 с. – № 8.– Москва. 2009.

[8] М.Ш. Маматов, Х.Н. Алимов, *К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка*, с. 16. – Т. 1. - №2.Математические труды.-Новосибирск. 2013.
[9] М.Ш. Маматов, М. Тухтасинов, *О задаче преследования в распределенных управляемых системах,* Кибернетика и системный анализ. – 153 с. – Т. 45. – № 2. – Киев. 2009.
[10] А.З. Фазылов, *Существования ядра выпуклого множества в линейных дискретных системах управления,*-119 с.-Т.58.-№1. Математические заметки.-Москва. 1995.
[11] А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий, *Об информированности в дискретных игровых задачах,* – 126 с. – № 5. Кибернетика. – Киев. 1979.
[12] Н.Ю. Сатимов, *О двух методах преследования в линейных дискретных играх* , – 3 с. – № 11. ДАН УзССР. – Ташкент. 1979.
[13] Н.Ю. Сатимов, *Задача убегания для одного класса нелинейных дискретных игр*, -45 с. -Т.9.-№6.Техн. Киберн. Изв. АН СССР.-Москва, 1973.
[14] Н.Ю. Сатимов, А. Азамов, *Нелинейные дискретные игры убегания*, - 79 с. - №4. Кибернетика.- Киев.1976.