JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

JDPI

1974

JIZZAKH STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE

MATEMATIKA VA INFORMATIKA

matinfo.jspi.uz

MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

№2
2021

MUNDARIJA

KVADRIKA MARKAZI

Xoljigitov Sobir Mamaraupovich

Jizzax Davlat pedagogika instituti

Annotatsiya: Ushbu maqolada turli ko'rinishdagi kvadrika tenglamasining markazini topishga doir masalalar yechilgan. Markazni topishda bir nechta usullarda ishlangan masalalar mavjud. Ma'lumki, geometriya kursida kvadrika tenglamalarini yechishda kvadratik formaning o'rni muhim hisoblanadi. Kvadratik forma Lagranj teoremalari orqali kanonik ko'rinishga keltiriladi, so'ngra normal ko'rinishga keltiriladi.

Kalit so'zlar: kvadratik forma, chiziqli forma, kvadrika .

Bizga ma'lumki, Kvadrikaga tegishli har bir nuqtaga biror S nuqtasiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqta yana kvadrikaga tegishli bo'lgan S nuqta kvadrikaning simmetriya markazi deb ataladi.

$$Q:\ a_{11}x_1x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{nn}x_nx_n +$$

$$+2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \ldots + 2a_nx_n + a_0 = 0 \qquad (1)$$

(1)-kvadrikaning simmetriya markazi S ning koordinatalari $x_1^0, x_2^0, \ldots \ \ldots, x_n^0$ quyidagi koordinatalar sistemasini qanoatlantirishi kerak.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots. \quad \ldots + a_n x_n^0 = -a_1 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots. \quad \ldots + a_{2n} x_n^0 = -a_2 \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \ldots. \ \ldots + a_{nn} x_n^0 = -a_n \end{cases} \qquad (2)$$

Demak, kvadrikaning markazining mavjudligi masalasi ikkinchi tenglamalar sistemasining yechimiga bog'liq.

(2)-tenglamalar sistemasidan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ - - - & - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{deb olsak,}$$

1) $\Delta \neq 0$ *bo'lganda (2)-tenglamalar sistemasi yechimga ega kvadirika bitta simmetiriya markaziga ega bo'lib u markazli kvadirika deb ataladi*

2) $\Delta = 0$ *bo'lganda (2)- tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, kvadrikaning markazi cheksiz ko'p bo'ladi.*

3) $\Delta = 0$ *bo'lib, (2)- tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmasa kvadrika bitta ham markazga ega emas.*

Keyingi ikkinchi va uchinchi hollarda kvadrika markazsiz deyiladi. [1]

Biz kvadrika markazini topishga doir amaliy masalalardan na'munalar keltiramiz:

1-masala. A_3 da berilgan kvadrikalarning markazlarini toping.

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$

b) $4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2 - 4x_3 - 1 = 0$

Yechish: Kvadrika markazini ikki usulda topishimiz mumkin.

Birinchi usul:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$$

Bu kvadrika tenglamasidan quyidagi koeffisientlarni topib olamiz:

$$a_{11} = 1,\ \ a_{12} = 1,\ \ a_{13} = 3,$$

$$a_{21} = 1,\ \ a_{22} = 1,\ \ a_{23} = 1,$$

$$a_{31} = 3,\ \ a_{32} = 1,\ \ a_{33} = 1$$

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = -3,\ \ a_3 = -1.$$

Bu koefsentlarni quyidagi tengsizlikka qo'yamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 = -a_1 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 = -a_2 \\ a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0 = -a_3 \end{cases}$$

Natijada ushbu tengsizliklar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1^0 + x_2^0 + 3x_3^0 = -1 \\ x_1^0 + x_2^0 + x_3^o = 3 \\ 3x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 1 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasining koefsentlaridan

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ni topamiz ya'ni: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 1 + 3 + 3 - 9 - 1 - 1 = -4$$

ekanligidan foydalanib $-4 \neq 0$ kvadrika yogona simmetriya markaziga ega ekanligi ma'lum . Endi esa simmetriya markazi S$(x_1^0; x_2^0; x_3^0)$ ning koordinatalari bo'lgan x_1^0, x_2^0, x_3^0 larni topamiz. Buning uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} x_1^0 + x_2^0 + 3x_3^0 = -1 \\ x_1^0 + x_2^0 + x_3^o = 3 \\ 3x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3^0 = -4 \\ 2x_1^0 - 2x_3^0 = 2 \\ 3x_1^0 + x_2^o + x_3^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = -1 \\ x_2^0 = 6 \\ x_3^0 = -2 \end{cases}$$

Demak bu kvadrikaning yagona simmetriya markazi mavjud va u

S(-1;6;-2)ga teng.

Ikkinchi usul:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$$

Berilgan kvadrika tenglamasidan uning simmetriya markazini topish uchun

avval x_1 bo'yicha keyin x_2 bo'yicha nihoyat x_3 bo'yicha xususiy hosila olamiz:

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2 = 0 \\ 2x_2 + 2x_1 + 2x_3 - 6 = 0 \\ 3x_3 + 2x_2 + 6x_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar oldidagi koefsentlar orqali

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 24 + 24 - 72 - 8 - 12 = -16$$

Ekanligidan foydalanib $-16 \neq 0$ kvadrika yagona simmetrrya markaziga ega ekanligi ma'lum . Endi esa simmetriya markazi S$(x_1; x_2; x_3)$ ning koordinatalarini bo'lgan x_1, x_2, x_3 larni topamiz: Buning uchun

Quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2 = 0 \\ 2x_2 + 2x_1 + 2x_3 - 6 = 0 \\ 3x_3 + 2x_2 + 6x_1 - 2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} 4x_3 + 8 = 0 \\ -4x_1 + 4x_3 + 4 = 0 \\ 3x_3 + 2x_2 + 6x_1 - 2 = 0 \end{cases} =>$$

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ Demak, kvadrikaning simmetriya markazi S(-1;6;-2) ga teng.

2-Masala: $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 4x_2 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi kvadirikaning markazini toping va turini aniqlang. [2]

Yechish: Kvadirikaning simetirya markazini topish uchun berilgan tenglamadan avval x_1 bo'yicha keyin x_2 bo'yicha nihoyat x_3 bo'yicha xususiy hosila olamiz. Natijada quydagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4 = 0 \\ 4x_1 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Demak, kvadrika markazi S(0;2;0) ga teng.

Endi quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + 2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

va kvadirika tenglamasiga olib borib qo'yamiz va kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$y_1^2 + y_2^2 + 4y_2 + 4 + 4y_1y_3 - 4y_2 - 8 = 0$$

$$y_1^2 + y_2^2 + 4y_1y_3 - 4 = 0$$

$$\varphi_1 = y_1^2 + y_2^2 + 4y_1y_3$$

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 2y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} => \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$z_1^2 = y_1^2 + 4y_1y_3 + 4y_3^2$

$$\frac{z_1^2}{a_{11}} = y_1^2 + 4y_1y_3 + 4y_3^2$$

$$\varphi - \frac{z_1^2}{a_{11}} = y_2^2 - 4y_3^2$$

$$\varphi = z_1^2 + z_2^2 - 4z_3^2$$

$$\varphi = z_1^2 + z_2^2 - 4z_3^2 - 4 = 0$$

3-Masala:

1.Kvadrikaning markazini toping.

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - 12 = 0$$

Yechish:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 4 = 0 \end{cases} => \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = 0$ bo'ladi

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 4 = 0 \end{cases} => x_1 = -2x_2$$

Demak $\Delta = 0$ bo'lib tenglamalar sistemasi cheksiz yechimga ega ekanligidan berilgan kvadrika cheksiz ko'p simmetriya markaziga ega.

2. Kvadrika markazga egami?

$$4x_1x_2 - x_2^2 - 8x_1 + 8x_2 - 8 = 0$$

Berilgan kvadrikadan x_1 va x_2 bo'yicha xususiy hosilalar olib quyidagi tanglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 4x_2 - 8 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

$$\begin{cases} 4x_2 - 8 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Demak $\Delta \neq 0$ bo'lib, tenglamalar sistemasi yechimga ega ekanligidan kvadrika yagona simmetriya markaziga ega, ya'ni S(-1;2)

3. Kvadrika markazga egami?

$$x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5 = 0$$

Berilgan kvadrikadan x_1, x_2 va x_3 bo'yicha xususiy hosilalar olib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 + 4x_3 - 6 = 0 \\ 16x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 + 4x_3 - 6 = 0 \\ 16x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} 8x_3 - 8 = 0 \\ 16x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4 = 0 \\ 4x_2 - 4x_1 - 4 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Demak $\Delta \neq 0$ bo’lib tenglamalar sistemasi yechimga ega ekanligidan berilgan kvadrika yagona simmetriya markaziga ega, ya’ni S(-1;0;1) ga teng.

Xulosa qilib aytganda, har qanday ikkinchi tartibli chiziqning markazga ega yoki ega emasligini aniqlash mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

1. N.D.Dadajonov, M.Sh.Jo’raeva. Geometriya. 1-qism. Toshkent, «O’qituvchi» 1996 y.
2. X.X.Nazarov, X.O.Ochilova, E.G.Podgornova. Geometriyadan masalalar to’plami. 1-qism. Toshkent. O’qituvchi 1997 y.
3. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to`plami. Toshkent. «O`qituvchi», 2006 yil.
4. A.R.Artikov “Analitik geometriya” Samarqand 2009.
5. K.X. Abdullaev i dr. Sbornik zadach po geometrii. T-2004.