

SINUS VA KOSINUS TEOREMASINING BA'ZI BIR ISBOTLARI VA UNING TATBIQLARI HAQIDA.

Usarov Sardor Abdinazirovich

JDPU, Matematika va informatika fakulteti, katta o'qituvchi

Xudoyberdiyeva Zulayho Hasan qizi,

Xabibullayeva Sevinch Anvar qizi,

JDPU, Matematika va informatika fakulteti, 3-bosqich talabalari

Annotatsiya: Ushbu maqolada sinus va kosinus teoremlari, ularning metematik formulalari, qo'llanish sohalari va turli geometrik masalalarni yechishda qanday ishlatilishi tushuntiriladi. Misollar asosida yechimlar ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Sinus teoremasi, kosinus teoremasi, trigonometrik formulalar, uchburchak, burchaklar.

Maktab geometriya kursi o'quvchilarda matematik bilimlar fundamentini shakllantiradigan juda qiziq va boy kursdir. Matematik bilimlarni mакtabda yaxshi o'zlashtirilishi albatta o'qtuvchining mahorati va fan bilimlarini mustaxkamlash egallaganligi bog'liq. O'quvchilarda har qanday mavzu bo'yicha bilimlarni shakllantirish uchun o'qtuvchi o'rganilayotgan mavzular bo'yicha katta bilimlar bazasiga ega bo'lishi kerak.

Geometriya va trigonometriya matematikaning muhim bo'lmlaridan biri bo'lib, sinus va kosinus teoremlari ularda alohida ahamiyatga ega. Ushbu teoremlar uchburchakning tomonlari va burchaklari o'rtaqidagi bog'lanishni aniqlashga xizmat qiladi va murakkab geometrik massalalarni yechishda asosiy vasitalardan biri hisoblanadi. Ular nafaqat nazariy masalalarda, balki amaliy sohalarda ham keng qo'llaniladi.

Sinus teoremasi har qanday uchburchak tomonlari uzunliklari va ularga qarama - qarshi burchaklar sinuslari o'rtaqidagi nisbatini ifodalaydi. Bu teoerma ayniqsa, tomonlari va burchaklari qisman ma'lum bolgan uchburchaklarni hisoblashda qo'l keladi. Kosinus teoremasi esa uchburchak tomonlari va ular

orasidagi burchaklar o'rtasidagi kvadrat tenglamalar orqali bog'lanishni tushuntiriladi.

O'quvchilarga mavzuni tushuntirishda albatta har qanday teorema tarixi va uning isbotlari haqida tushuncha berish maqsadga muvofiqdir. Har qanday teoremalarni isbotlashning ko'plab usullari mavjud. Bir narsani turli xil usullar orqali isbotlashni o'rgatish o'quvchilarda ilmiy dunyoqarashni oshirishga yordam beradi.

Sin va *cos* belgilari bilan zamonaviy sinus va kosinus yozuvlari birinchi marta 1739 yilda Bernulli tomonidan Sankt - Peterburg matematigi L.Eylerga yozilgan. Ushbu belgilar juda qulay degan xulosaga kelib, ularni matematik ishlarida ishlata boshladи. Bundan tashqari Eyler x burchakning trigonometrik funksiyalari uchun quyidagi qisqartmalarni kiritadi: $\operatorname{tag}x$, $\operatorname{cot}x$, $\sin x$, $\cos x$.

Sinuslar teoremasi: Sinuslar teoremasi har qanday uchburchakning tomonlari va qarama - qarshi uchburchakning sinuslari o'rtasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Teorema quyidagicha ifodalanadi.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Bu yerda:

- a, b, c - uchburchak tomonlari,
- A, B, C - shu tomonlarga qarama-qarshi burchaklar,
- R - uchburchakning tashqi chizilgan aylananing radiusi.

ΔABC , $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$

Isbot: Uchburchak yuzini burchak sinusi orqali topish formulasiga ko'ra,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Bu tengliklarning dastlabki ikkitasiga ko'ra,

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A, \text{ demak } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

Shuningdek, tenglikning birinchi va uchunchidan $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Agar ABC to'g'ri burchakli uchburchakga R radius aylana tashqi chizilgan bo'lsa, u holda

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Sinus teoremasi isbotlarning juda ko'pchilligi shakllar orqali isbotlangan. Ularning ko'pchilligi ko'rinishi soddaligiga qaramay, ushbu isbotlarda shakllar formulalar foydalaniladi va bu shakllar sinus teoremasidan ancha qiyinroqdir.

O'quvchilarning bilim darajasi, dunyo qarashi va qiziqishlari va shunga mos holda o'tilayotgan dars mazmuni qabul qilish imkoniyati ham turlicha bo'ladi. Shularni xisobga olgan holda matematika fani oqtuvchisi har bir dars yuzasidan isbotlashga doir mavzularni turlicha usullarda usulini ko'rsatish maqsadga muvofiq xisiblanadi. Bu isbotlash usullsri soddadan murakkabga qarab ketma ket o'qtilishida har bir o'quvchi o'z bilim doirasidan kelib chiqan holda teoremaning isbotlash usullari ichidan o'ziga ma'qulini tanlab olish imkoniyatiga ega. Shunday ekan sinus teoremasining yana boshqa usulda ham isbotini ko'rib o'tish maqsadga muvofiq bo'ladi.

$$\sin \beta = \frac{x}{A} \quad x = \sin \beta * A$$

$$\sin \gamma = \frac{x}{B} \quad x = \sin \gamma * B$$

$$\frac{1}{AB} |A * \sin \beta - B * \sin \gamma| * \frac{1}{AB}$$

$$\frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \gamma}{A} = \frac{\sin \theta}{C}$$

Yuqorida isbotlangan sinus teoremasi judda ham o'quvchilarga sodda qilib tushuntirilgan. O'quvchilarga teorema, isbotlarni ularga tushunarli bo'lgan holda tushuntirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Oqtuvchi o'quvchilarga sinus teoremasini tushuntirishdan oldin chizmasini chizib so'ng tushuntsa isbot ham, o'quvchilar ham oson tushunadi. O'zi qiyin fan yo'q, balki qiyin tushuntirish bor xolos. Har doim mavzu tushuntirilgandan so'ng misol ham ko'rsatib o'tilishi lozim.

Masala: Uchburchakning tomonlari $AB=12$, $AC=14$, va burchagi $\angle A=40^\circ$. Uchburchakning qolgan burchaklari $\angle B$ va $\angle C$ va tomon BC ni toping?

Yechimi: 1. Sinus teoremasiga ko'ra:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$$

Bu tenglikdan foydalanamiz.

2. Burchak C ni hisoblaymiz:Dastlab, $A=40^\circ$, $AB=12$, va $AC=14$.

Sinus teoremasidan.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

Bu tenglikni $\sin C$ ni topish uchun qayta yozamiz: $\sin C = \frac{AB \sin 40^\circ}{AC}$. Haqiqiy qiymatlarni qo'shsmiz: $\sin C = \frac{12 \cdot \sin 40^\circ}{14}$ $\sin 40^\circ \approx 0.6428$, shuning uchun $\sin C \approx \frac{12 \cdot 0.6428}{14} \approx 0.5508$ Demak: $a^2 + b^2 = c^2$

$$C \approx \arcsin(0.5508) \approx 33.4^\circ$$

3.Burchak B ni topish: $a^2 + b^2 = c^2$ Uchburchak burchaklar yig'indisi 180° bo'lgani uchun: $B=180^\circ - A - C$ $a^2 + b^2 = c^2$ va $B=180^\circ - 40^\circ - 33.4^\circ \approx 106.6^\circ$

4.Tomon BC ni topish: $BC = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 106.6^\circ}$ $\sin 40^\circ \approx 0.6428$ va $\sin 106.6^\circ \approx 0.9730$,

$$BC = \frac{14 \cdot 0.6428}{0.9730} \approx 9.24$$

Kosinuslar teoremasi: Kosinuslar teoremasi uchburchak burchaklarini topmasdan, uning burchaklari bo'yicha turini (o'tkir, o'tmas yoki to'g'ri burchakli ekanligini) aniqlashga imkon beradi.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{formulada}$$

- 1) Agar $b^2 + c^2 > a^2$ bo'lsa, $\cos A > 0$. Demak, A-o'tkir burchak;
- 2) Agar $b^2 + c^2 = a^2$ bo'lsa, $\cos A = 0$. Demak, A-to'g'ri burchak;
- 3) Agar $b^2 + c^2 < a^2$ bo'lsa, $\cos A < 0$. Demak, A-o'tmas burchak;

$b^2 + c^2 = a^2$ tenglik yoki $b^2 + c^2 < a^2$ tongsizlik a-uchburchakning eng katta tomoni bo'lgan holdagina bajariladi. Demak, uchburchakning to'g'ri yoki o'tmas burchagi uning eng katta tomoni qarshisida yotadi.

Teorema: Uchburchak istalgan kvadrati qolgan ikki tomon kvadratlari yig'indisi shu ikki tomon bilan ular orasidagi burchak kosinusini ko'paytmasining ikkilangani ayirmasiga teng,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

Isbot: ABC uchburchakning BD balandligini o'tkazamiz. D nuqta AC tomonda yoki uning davomida bo'lishi mumkin. Birinchi holni qaraymiz. To'g'ri burchakli BCD uchburchakda Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

DC=AC-AD bo'lgani uchun;

$$BC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = BD^2 + AC^2 - 2 * AC * AD + AD^2$$

To'g'ri burchakli ABD uchburchakda $BD^2 + AD^2 = AB^2$ va AD=ABcosA ekanligini hisobga olib, oxirgi tenglikdan

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB * AC * cosA,$$

Ya'ni $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ tenglikka ega bo'ladi.

Kosinus teoremasi Pifagor teoremasining umumlashganidir. $A=90^\circ$ bo'lganda ($\cos 90^\circ = 0$) bo'lgani uchun) kosinuslar teoremasidan Pifagor teoremasi kelib chiqadi.

Maktab o'quvchilariga matematika kursining sinus va kosinus teoremasi. Sinus va kosinus teoremalarini dars jarayonlarida shakllardan, formulalardan foydalangan holda tushuntirladi. Formulalarni isboti bilan keltirib ularga tushuntirib berib ularni matematika faniga bo'lgan qiziqishi va faolligini yanada kuchaytirish mumkin. Umuman olganda, dars jarayonini yanada qiziqarli qilib o'tkazishda ta'lim metodlaridan, ko'rgazmali materiallardan foydalanib samarali natijalarga erishish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Qodirov R. Matematika nazaryasi va amaliyoti. Toshkent: fan va texnologiyalari, 2015
2. Toshmatov A., Mirzayev S. “Geometriya”. Toshkent: “O’qituvchi” nashriyoti, 2020
3. Jorayev X., O’razboyev R. “Matematika va trigonometriya asoslari.” Toshkent “Sharq” nashiryoti, 2020
4. Usarov S. “Masalani yechishga o‘rgatish orqali matematikanio‘qitish texnologiyasining asosiy xususiyatlari”. Educational Research in Universal Sciences ISSN: 2181-3515 VOLUME 2 | SPECIAL ISSUE 18 | 2023.
5. Usarov S. “Masalani yechishga o‘rgatish orqali matematikani o‘qitish texnologiyasining asosiy xususiyatlari”. Образование наука и инновационные идеи в мире. Выпуск журнала № – 14 Часть–1 Февраль–2023